第二單元 根式的運算與化簡

2-1 平方根式

我們知道$3+2\sqrt{2}$是一個正數，所以$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$有意義，又$3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$，所以

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$$

在根式$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$中有兩層根號，顯得複雜。因此，我們喜歡將$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$化簡爲$1+\sqrt{2}$。但有些兩層根號的根式，如$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，並不能化簡成一層。

前面說過，對正數k而言，恆有$\sqrt{k^2}=k$。當$k=0$時，$\sqrt{k^2}=k$，顯然也對。但$k<0$時，k^2是正數，$\sqrt{k^2}$有意義，但$\sqrt{k^2}=k$不成立。事實上，無論$k>0$，$k=0$，$k<0$，恆有

$$\sqrt{k^2}=|k|$$

例如：

$$\sqrt{(\frac{3}{7})^2}=\frac{3}{7}$$

$$\sqrt{(-\frac{3}{7})^2}=\frac{3}{7}$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$$

例題 1

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$　　　(2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{解}}$

(1) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6+2-2\sqrt{6\cdot 2}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

(2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

立即演練

化簡 $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$ 。

爲了不讓分母帶有根號，我們常利用乘法公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 去掉分母中的根號，例如：

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

例題 2

化簡下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$　　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$

$\boxed{\text{解}}$

(1) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}+\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{3+5-2\sqrt{15}}{3-5}+\dfrac{3+5+2\sqrt{15}}{3-5}=-4-4=-8$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{7-3\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{14-2\sqrt{45}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{5})^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$

立即演練

化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ 。

習題 2-1

1. 化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{2205}$

(2) $\sqrt{72600}$

(3) $\sqrt{12}-\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

(4) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+1)$

(5) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

(6) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{5}{1-\sqrt{6}}$

(7) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(8) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

2. 設 $0<x<1$，化簡 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}$ 。

2-2 立方根式

我們知道 $2^2=4=(-2)^2$，但 $2^3=8$ ，$(-2)^3=-8$ 。一般而言，正數的立方（三次方）是正數，負數的立方是負數，而 0 的立方是 0。當 $x^3=a$ 時，x 與 a 的符號相同。此時，$x=\sqrt[3]{a}$ 。換句話說，$x^3=a$ 與 $\sqrt[3]{a}=x$ 是完全一樣的意思。例如：

$$2^3=8 \text{，} \sqrt[3]{8}=2$$

$$(-2)^3=-8 \text{，} \sqrt[3]{-8}=-2$$

$$(-1)^3=-1 \text{，} \sqrt[3]{-1}=-1$$

$$(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125} \text{，} \sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{4}{5}$$

特別的，

$$(k)^3=k^3 \text{，} \sqrt[3]{k^3}=k$$

設 a 是一個數，若 $\sqrt[3]{a}=x$，則 $(\sqrt[3]{a})^3=x^3$，又此時 $x^3=a$，故恆有

$$(\sqrt[3]{a})^3=a$$

例如：

$$(\sqrt[3]{2})^3=2 \text{，} (\sqrt[3]{5})^3=5 \text{，} (\sqrt[3]{-7})^3=-7$$

對任意數 a，b，考慮 $\sqrt[3]{a}$ 與 $\sqrt[3]{b}$ 的乘積 $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$，由於

$$(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})^3=(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})=(\sqrt[3]{a})^3(\sqrt[3]{b})^3=ab$$

所以

$$\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$$

例如：

$$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{189}=\sqrt[3]{27\cdot 7}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{7}=3\sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt[3]{1080}=\sqrt[3]{8\cdot 135}=2\sqrt[3]{135}=2\sqrt[3]{27\cdot 5}=6\sqrt[3]{5}$$

例題 1

化簡下列根式：

(1) $\sqrt[3]{2000}$　　(2) $\sqrt[3]{-56}$

解

(1) $\sqrt[3]{2000}=\sqrt[3]{1000\cdot 2}=\sqrt[3]{1000}\cdot\sqrt[3]{2}=10\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt[3]{-56}=\sqrt[3]{(-1)\cdot 56}=\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{56}=(-1)\sqrt[3]{8\cdot 7}=-2\sqrt[3]{7}$

立即演練

化簡下列根式：

(1) $\sqrt[3]{256}$　　(2) $\sqrt[3]{-375}$

在例 1(2)中，我們注意到 $\sqrt[3]{-56}=-\sqrt[3]{56}$。事實上，

$$\sqrt[3]{-a}=\sqrt[3]{(-1)a}=\sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{a}=(-1)\sqrt[3]{a}=-\sqrt[3]{a}$$

所以恆有

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$$

例題 2

化簡下列根式：

(1) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-81}-\sqrt[3]{192}$　　(2) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{25})$

解

(1) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-81}-\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}$

$=\sqrt[3]{8\cdot 3}-\sqrt[3]{27\cdot 3}-\sqrt[3]{64\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}=-5\sqrt[3]{3}$

(2) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{25})=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{125}$

$=2+\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}-5=-3+\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}$

立即演練

化簡下列根式：

(1) $\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{-128}+\sqrt[3]{250}$　　(2) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})^3$

立方根式如同平方根式，當 $b\neq 0$ 時，也有

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

此外，在處理立方根式時，我們也儘量使根號內沒有分數，也使分式中的分母不帶根號。

例題 3

化簡下列根式：

(1) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{32}$　　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$

解

(1) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{32}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{8\cdot 4}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+2\sqrt[3]{4}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}+2\sqrt[3]{4}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{5+3}$

$=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{8}$

立即演練

化簡下列根式：

(1) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{18}$　　(2) $\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$

習題 2-2

1. 化簡下列根式：

   (1) $\sqrt[3]{432}$

   (2) $\sqrt[3]{-320}$

   (3) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

   (4) $(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2)$

   (5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

   (6) $\dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$

2. 設 $n<5\sqrt[3]{2}<n+1$，其中 n 是一個整數，求 n。