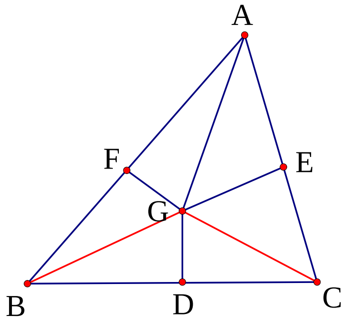
林柏佐

任何三角形都是等腰三角形？

在學 Euclidean 幾何時，常常我們還是無可避免的談到公設等，讓人覺得很枯燥乏味，但是其實在這些公設的背景之下，我們才能推出豐富的幾何性質之外，他還有什麼用呢？還有一個目的是避免人很直觀的錯誤，底下我們來看一個很有趣，但是是很嚴重錯誤的“證明”，就是任意三角形都是等腰三角形，如果這件事情對的話，那我也可以推到任意三角形都是正三角形，那全世界就只有一種三角形！大家一起想想，到底是哪裡出問題呢？



如右圖，做 A 的分角線與 $\overline{BC}$ 的中垂線交於 G,

從 G 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 作垂足分別為 D, E, F，考慮

ΔAFG 與 $\Delta AEG, \because \angle AFG = \angle AEG = 90^\circ$,

$\angle FAG = \angle EAG (\because \overline{AD}$ 是分角線)，且 $\overline{AG} = \overline{AG}$,

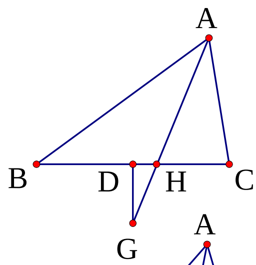
$\Rightarrow \Delta AFG \cong \Delta AEG(AAS) \Rightarrow \overline{GF} = \overline{GE}, \overline{AF} = \overline{AE} \cdots (1)$

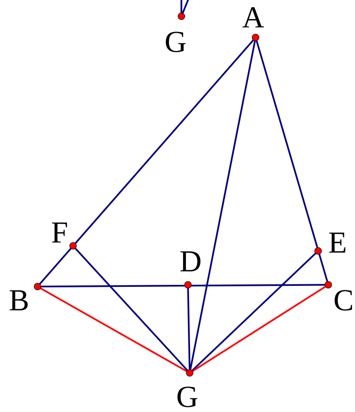
再來我們考慮 ΔBFG 與 $\Delta CEG, \because \overline{GF} = \overline{GE}, \angle BFG = \angle CEG = 90^\circ, \overline{BG} = \overline{CG} (\because$

中垂線上的點到 2 點等距離) $\Rightarrow \Delta BFG \cong \Delta CEG(RHS) \Rightarrow \overline{BF} = \overline{CE} \cdots (2)$，由(1)(2)

我們就可以推得 $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AE} + \overline{CF} = \overline{AC}$，故 ΔABC 為等腰三角形。

或許有人會說，這個又不一定會交於內部，有可能是交於外部，事實上不是可能，是一定交於外部？為什麼呢？如果我們已經知道 $\overline{AB} > \overline{AC}$ 由內分比我們可以知道，$\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} > 1 \Rightarrow H$ 在 D 的右邊。因此他們必交於外部，但是交於外部問題就解決了嗎？其實沒那麼容易。

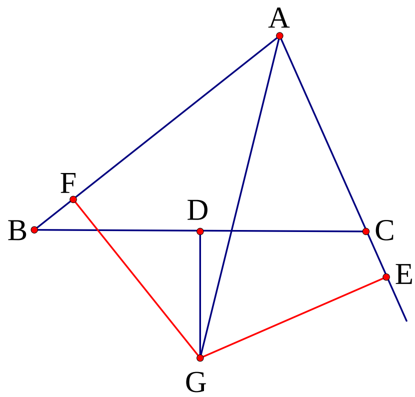




如右圖，於前面的方法一樣，我們所做的輔助線都一樣，唯一的差異是在交於外部，那麼利用相同的證明方式，我們還是可以說它是等腰三角形。那問題出在哪邊呢？從前面的“證明”中，如果我們假設它是對的，那就可以得 $\angle BGF = \angle CGE, \angle BGD = \angle CGD$
$\Rightarrow \angle FGD = \angle EGD$，又 $\angle AGF = \angle AGE$ 且
$\angle AGF = \angle FGD + \angle DGA = \angle EGD + \angle DGA = \angle AGE + 2\angle DGA = \angle AGE \therefore$ 我們得到

$\angle DGA = 0^{\circ}$，也就是此不合理的現象，造成我們前面得到錯誤的“證明”。

底下我們就展示出正確的圖形為何：



事實上，分角線與中垂線的交點，分別對兩邊做高，一定一個在三角形內部，另一個在三角形外部，這個結果就能將我們剛剛所有覺得很奇怪的情況一網打盡，而不在會有問題。

希望能從這樣的例子中，讓大家更能體會為什麼要學數學？為什麼要學幾何學？為什麼要學證明？除了訓練邏輯思考外，更重要的是你不會被別人牽著鼻子走，不會因為別人畫的不精準，錯誤的“證明”你就相信世界上就只有正三角形一類，希望能夠重新打開你對數學的認知。