第五單元 平面幾何

5-1 三角形

例題 1

設直角三角形 ABC 中，$\angle A$ 是直角，求證：若 $\overline{AH}$ 是斜邊 $\overline{BC}$ 上的高，則 $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \bullet \overline{BC}$ 。

$\boxed{解}$

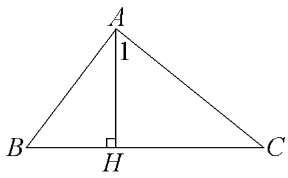


圖 5-27

作圖 $5-27$ ，在 ΔBAC 與 ΔBHA 中，

$\angle BAC = 90^\circ = \angle BHA$ ， $\angle ACB = 90^\circ - \angle 1 = \angle HAB$ ，

得到 $\Delta BAC \sim \Delta BHA$ （ AA 性質）。

故 $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$ （即 $\overline{BA} : \overline{BH} = \overline{BC} : \overline{BA}$ ），

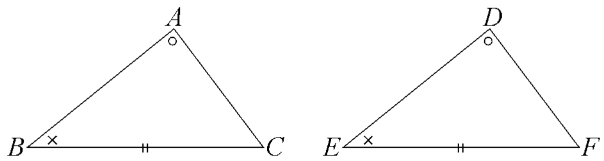
$\overline{BA}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$ ，即 $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$ 。

立即演練

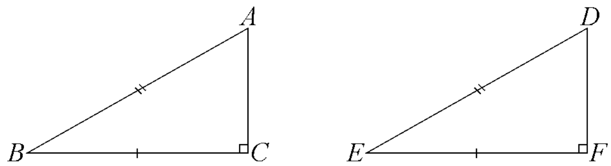
設 ΔABC 中， $\angle A = 90^\circ$ ，試證：若 $\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，則 $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ 。

習題 5-1

1. 在 ΔABC 與 ΔDEF 中，試證：若 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則 $\Delta ABC\cong\Delta DEF$。（$AAS$ 性質：兩角及其中一角的對邊對應相等的兩三角形必全等）

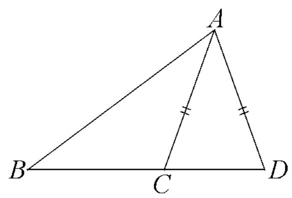


2. 在 ΔABC 與 ΔDEF 中，試證：若 $\angle C=\angle F=90^\circ$，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，則 $\Delta ABC\cong\Delta DEF$。（斜股性質：斜邊及一股對應相等的兩直角三角形必全等）

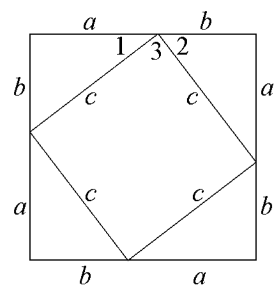


3. 試證：到角兩邊等距離的點必在此角的平分線上。

4. 右圖中，$\overline{AC}=\overline{AD}$，且點 B，C，D 在一直線上。試在 ΔABC 及 ΔABD 中，找出有兩邊及其中一邊的對角對應相等。（兩邊及其中一邊的對角對應相等的兩三角形未必全等）



5. 右圖中，有 4 個全等的直角三角形，兩股長為 a，b，斜邊長為 c，中間是邊長為 c 的正方形。
   (1)試說明 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$。
   (2) 4 個直角三角形加上中間正方形的面積和等於一個邊長為 $a+b$ 的正方形面積，試由此導出 $c^2=a^2+b^2$。



6. 試證：四邊形中，若有一雙對邊既平行又等長，則此四邊形為平行四邊形。

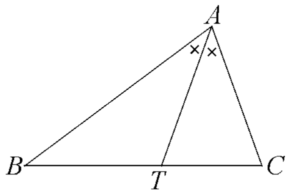
7. 四邊等長的四邊形稱為菱形。試證：菱形的對角線互相垂直平分。

8. (1)試證：矩形（內角為直角的平行四邊形）的兩對角線等長。

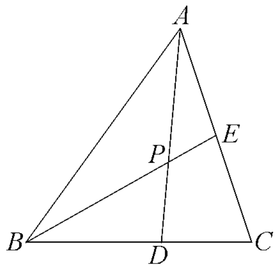
(2)畫圖說明兩對角線等長的四邊形未必是矩形。

9. 設 ΔABC 中，$\angle BAC$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 T。試證：ΔABT 與 ΔACT 的面積比 ΔABT ： $\Delta ACT=\overline{AB}$ ： $\overline{AC}$ ，且 ΔABT ： $\Delta ACT=\overline{BT}$ ： $\overline{TC}$ 。

（由此可知 $\overline{BT}$ ： $\overline{TC}=\overline{AB}$ ： $\overline{AC}$ ）



10. 設 ΔABC 中，點 D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}=3$ ： 2，又點 E 在 $\overline{AC}$ 的中點，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 P，求 $\overline{BP}$ ： $\overline{PE}$ 。



5-2 圓

例題 1

給定兩線段，其長分別爲 a 與 b，求作一長爲 $\sqrt{ab}$ 的線段。

解

作法：

作一線段 $\overline{AB}$，使其長爲 $a+b$，且取 $\overline{AB}$ 上一點 H，

使 $\overline{AH}=a$，則 $\overline{BH}=b$。

再以 $\overline{AB}$ 爲直徑作一半圓，如圖 $5-39$，

過點 H 作 $\overline{AB}$ 的垂線交半圓於 C，

則 $\overline{CH}$ 即爲所求。

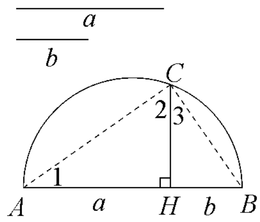


圖 5-39

證明：

$\angle ACB$ 爲直角，所以在 ΔAHC 與 ΔCHB 中，

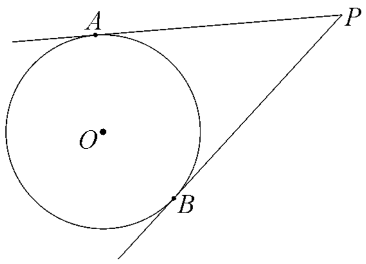
$\angle 1 = 90^\circ - \angle 2 = \angle 3$，$\angle AHC = 90^\circ = \angle CHB$，

故 $\Delta AHC \sim \Delta CHB$（$AA$）。

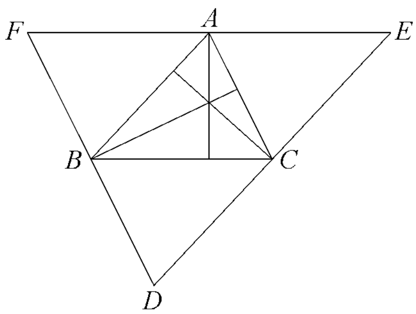
於是，$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{BH}}$，即 $\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH} = ab$，所以 $\overline{CH} = \sqrt{ab}$。

習題 5-2

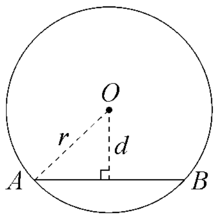
1. 設點 P 在圓 O 外，過點 P 有兩條直線與圓 O 相切，切點分別爲 A，B，試證：$\overline{PA}=\overline{PB}$。



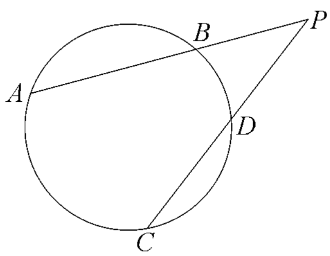
2. 給定 ΔABC，分別過頂點 A，B，C，作對邊的平行線，設三線圍成 ΔDEF。試證：ΔABC 的三高分別是 ΔDEF 的三邊中垂線。（由此可知：ΔABC 的三高交於一點，此點稱爲 ΔABC 的垂心）



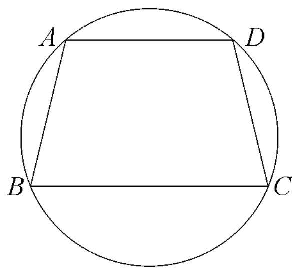
3. 設圓 O 的半徑爲 r，圓心 O 到弦 $\overline{AB}$ 的距離爲 d，試以 r 及 d 表弦 $\overline{AB}$ 之長。



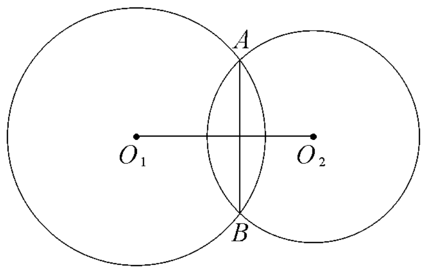
4. 在一圓中，設弦 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 的延長線在圓外交於點 P，試證：$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$。



5. 設梯形 $ABCD$ 內接於一圓，其中 $\overline{AD} // \overline{BC}$，試證：$\angle B = \angle C$，且 $\overline{AB} = \overline{DC}$。



6. 設兩圓 O_1 與 O_2 相交於點 A，B，試證：$\overline{O_1O_2}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。



7. 設銳角 ΔABC 的三高爲 $\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$，試證：$\overline{DA}$ 平分 $\angle EDF$。（提示：利用四點共圓）