數與坐標系

數系與常用的符號

談到數學，首先當然要談到“數”，但是在人類漫長的歲月中，有需要的時候，才慢慢發展出各個數系，底下我們就按照人類的歷史，一一做簡單的介紹。特別強調一點，通常我們是利用集合表示各個不同的數系，但為了與一般集合有所區隔，因此符號上我們都會用粗體，至於平常書寫，就會多加一劃特別表示。

$\mathbb{N}$ (natural number):自然數

就是我們平常用的正整數，由於最直接與最自然而得，故稱為自然數，因此有一說法是，上帝創造了自然數，其他的數都是人類發明的。

$\mathbb{Z}$:整數(integer)

一開始人們都只有正數的概念，但是到後來有相對的概念引入，因而創造了負數，以及相對的基準點(0 的概念)引入，因而發明了整數。

$\mathbb{Q}$:有理數(rational number)$\left(\mathbb{Q}=\left\{\frac{q}{p}\middle| p,q\in\mathbb{Z}, p\neq 0\right\}\right)$

由於$\mathbb{Z}$在加法(減法)和乘法下都保持有封閉性，可是在除法下會有些缺憾，不是任何 2 數都可以整除(不過也因為這樣，發展出數論這一門學派，讓整數有許多很漂亮的性質，是其他數系所沒有的)，為了彌補這點，希望滿足代數上的結構，因此發展出來有理數。不過或許有同學會覺得很奇怪，為什麼要叫做有理數呢？可不是因為它很有道理喔！讓我們一起來看英文吧！有理數的英文是 rational number, 當初翻譯的人因為不懂數學，就從字面上(rational)翻譯為“有理”，但如果我們來看這個字的名詞”ratio”, 它其實是除的意思或是比例的意思，也是它真正根本的原因，不過後來因為大家習慣了，我們還是用有理數稱呼。特別注意一點，由與整數與有理數發展很早，它們都是由希臘字母縮寫而得，因此不能用英文去記憶符號。

$\mathbb{R}$ (real number):實數

在古希臘時代，大家就已經對有理數很滿意，因此有「萬物皆為有理數」之說；但會有實數的產生，與數學界的第一次革命有關，當時畢達哥拉斯學派提出了著名的畢氏定理，但是也因此畢達哥拉斯有個學生提出了一個質疑，如果一個正方形邊長為 1，那麼它斜邊長是多少？這讓畢達哥拉斯本人無法回答，因此將他的學生推到海裡(算是暫時解決問題，而且也不會跟他們信仰萬物皆為有理數矛盾)，不過數學家當然不因此滿足，最後經歷了很久的時間，才將這個缺口給補滿，也因此有實數的誕生，以及談論到實數完備性的問題，不過這在所有數系的

發展中是最辛苦，也最累人的，因此高中對如何創造實數並不會多談。

$\mathbb{C}$(complex number):複數$\left(\mathbb{C}=\left\{a+bi \middle| a,b\in\mathbb{R}, i=\sqrt{-1}\right\}\right)$

從字面上來看其實複數代表的意思就是複雜的數，而複數的發展主要是為了解決實係數多項式方程式的不足，我們都知道$x^2+1=0$這個在$\mathbb{R}$中是沒有解的，因此複數也由此誕生。

數系的關係：

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

整數

當我們談到整數的時候，一定不得不談到它最重要的一個定理——除法原理，基本上它非常的重要也很基本，依我個人的經驗，當想不太到整數要用的性質的時候，一定是利用除法原理去解題目，底下我們就來看此敘述。

除法原理

令$a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$. 則存在唯一的$q,r\in\mathbb{Z}$使得

$$a=bq+r, 0\leq r<|b|$$

Note. a稱為被除數，b稱為除數，q稱為商，r稱為餘數。唸作：a除以b, 商為q, 餘數為r. 與國中小一樣，特別留意題目是說除還是除以。

底下我們來看一個例子，是除法原理的應用，即國中常碰到的「韓信點兵法」。

Example.

韓信點兵，每 5 人一數、每 7 人一數、每 11 人一數都剩下 3 人，只知韓信的士兵人數介於 4000 和 6000 人之間，則韓信士兵的所有可能值為何？

Solution.

假設共有n人，由除法原理，我們可得

$$\begin{aligned} n&=5q_1+3\\ &=7q_2+3\\ &=11q_3+3, q_1,q_2,q_3\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

$\Rightarrow n-3=5q_1=7q_2=11q_3$

因此我們可得$n-3$是 5,7,11 的倍數，也就是$n-3$是$[5,7,11]=385$的倍數

$\therefore n-3=385k, k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n=385k+3$, 又$4000<n<6000$我們可得$k=11,12,13,14,15$

因此$n=4238,4623,5008,5393$人這些可能

Note. 特別留意一點，因為通常我們說餘數都是正的，也符合除法原理的要求，因此在做負數的除法原理時，需要特別留意，底下我們看看這個例子。
如果我們考慮“-5 除以 3 之餘數”，很多學生想必會回答 $q=-1, r=-2.$ 但並沒有符合我們除法原理的要求，因此正確的寫法為 $-5=3\cdot(-2)+1,$ 也就是 $q=-2, r=1.$ 這一點請特別留意。

7, 13 倍數的判別法

大部分的老師會教從某數的個位數開始，每三個數連在一起(一撇分開)，奇數組減去偶數組所剩下的數是否是 7, 13 的倍數(如:(奇數組的和)-(偶數組的和)=7, 13 的倍數，便是 7, 13 的倍數。基本上它是利用 1001 去證明，但是用起來麻煩，而且與其如此，我的建議是直接去除除看還比較快，而且更大的數，例如 1000001 如何保證是 7 的倍數，直接去除即可。不過這裡我針對這 2 個不大也不小的數，提供另一種判別法，或許較簡單，但是 2 數的判別方式是不同，要個別記憶。

7 的倍數:

(1)將這個數的個位數字乘以 2

(2)移去最後一個數字，再減掉(1)中得到的乘積

例如：$n=24598176$ 是否為 7 的倍數？

$$
\begin{array}{l}
2459817\cancel{6} \\
\underline{\quad\quad 12} \\
245980\cancel{5} \\
\underline{\quad\quad 10} \\
2459\cancel{70} \\
\underline{\ 18\quad} \\
22\cancel{7}
\end{array}
$$

我們可以很輕鬆的看出 22 不是 7 的倍數，因此可以知道 n 不是 7 的倍數。如果我們直接算可以得到 $24598176=7\cdot 3513125+1$ 也不是 7 的倍數。而它的想法就是利用 21 是 7 的倍數來得到此結果的(與 20 差 1)。

13 的倍數:

(1)將這個數的個位數字乘以 4

(2)移去最後一個數字，再加上(1)中得到的乘積

同上例，n 是否為 13 的倍數？

$$2459817\cancel{6}$$
$$\underline{\quad\quad 24}$$
$$245984\cancel{1}$$
$$\underline{\quad\quad 4}$$
$$24598\cancel{8}$$
$$\underline{\quad 32}$$
$$246\cancel{3}\cancel{0}$$
$$\underline{\ 12\ }$$
$$25\cancel{8}$$
$$\underline{32\ }$$
$$57$$

我們可以很輕鬆的看出 57 不是 13 的倍數，因此可以知道 n 不是 13 的倍數。如果我們直接算可以得到 $24598176 = 13 \cdot 1892167 + 5$ 也不是 7 的倍數。而它的想法就是利用 39 是 13 的倍數來得到此結果的(與 40 差 1)。

Note. 事實上我們從上面的經驗中，我們可以發現，一般我們判別是不是其倍數的時候，也可以判別其餘數是多少。(及原餘數與較小數的餘數相等)

因數問題

若 $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c (a, b, c \in \mathbb{N})$, 則

(1) n 之正因數個數: $(a+1)(b+1)(c+1)$

(2) n 之正因數和: $(1+2+2^2+\cdots+2^a)(1+3+3^2+\cdots+3^b)(1+5+5^2+\cdots+5^c)$

(3) n 之所有正因數乘積: $n^{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{2}} = n^{\frac{\text{正因數個數}}{2}}$

其餘的變化題可以由最簡單的這幾個推出。

斜率

$$\text{斜率 } m = \frac{\text{縱軸差}}{\text{橫軸差}}$$

討論.

(1) 若直線化為： $y = \square x + \triangle$

$\uparrow$ 表示斜率(也表示 $\tan\theta$)

(2) 若直線 $L: ax + by + c = 0 (b \neq 0) \Leftrightarrow$ 斜率 $m = -\dfrac{a}{b}$

截距式

Note. 雖然是用距離這個字，但是請注意截距可正、可負、可零。

一個隨著數系發展有用，但不會很難推得的性質

Property.

(1) 若 $a,b\in\mathbb{Q}, a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$

(2) 若 $a,b\in\mathbb{R}, a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

Note. 我們觀察上面兩個式子會發現 $\sqrt{2},i$ 在 $\mathbb{R}-\mathbb{Q},\mathbb{C}-\mathbb{R}$, 比 a,b 所在層次 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 更上一層，所以自然有這樣的結果，這個在很多方面都會用到這個實用結果！

在以前我們討論根號的時候，我們利用實數有交換律可以得到 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, 但是現在我們 a,b 可以小於 0, 所以有些狀況不一樣，我們把不同狀況給列出來。

(1) $\alpha<0,\beta<0 \Rightarrow \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

(2) $\alpha<0,\beta>0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=-\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$

Note. 這兩個例子不要死背，舉實際例子就可以記起來了！

算幾定理

這一個定理在高中裡算是超級重要的定理，非常多的不等式或是一些條件，都是利用這個定理推得的，所以請務必將此定理記熟！它的定理簡單來說就是說明算術平均數會大於等於幾何平均數。

Theorem. 若 $a\geq 0,b\geq 0 \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ("$=$" 成立時 $\Leftrightarrow a=b$)

Proof. $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0 \quad \therefore \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

而 "$=$" 成立時，$\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \Leftrightarrow a=b$