第一章 數與坐標系

1-1 整數

重點歸納一：整數的除法原理與餘數定理

1. 除法原理：若 a, b 爲整數，則可以找到整數 q 與 r 使 $a = bq + r$ 且 $0 \le r < |b|$，此時我們稱 a 爲被除數，b 爲除數，q 爲商，r 爲餘數；也可以說：「a 除以 b，得商爲 q，餘數爲 r」或「b 除 a，得商爲 q，餘數爲 r」.

2. 餘數定理：設正整數 x, y 除以 a 之餘數分別爲 r_1，r_2，則

   (1) $x + y$ 除以 a 之餘數恰爲 $r_1 + r_2$ 除以 a 之餘數.

   (2) $x \cdot y$ 除以 a 之餘數恰爲 $r_1 \cdot r_2$ 除以 a 之餘數.

《除法原理》

範例 1

(1)求 28 除以 9 之商及餘數.
(2)求 28 除以 -9 之商及餘數.
(3)求 -28 除以 10 之商及餘數.
(4)求 -28 除以 -10 之商及餘數.

解：(1) $\because 28 = 9 \times 3 + 1$　$\therefore$商爲 3，餘數爲 1
(2) $\because 28 = (-9) \times (-3) + 1$　$\therefore$商爲 -3，餘數爲 1
(3) $\because -28 = 10 \times (-3) + 2$　$\therefore$商爲 -3，餘數爲 2
(4) $\because -28 = (-10) \times 3 + 2$　$\therefore$商爲 3，餘數爲 2

演練 1

(1)求 -36 除以 11 之餘數.
(2)求 -36 除以 -11 之餘數.

解：(1) $\because -36 = 11 \times (-4) + 8$
$\therefore$餘數爲 8
(2) $\because -36 = (-11) \times 4 + 8$
$\therefore$餘數爲 8

《餘數定理》

範例 2

設二正整數 x 與 y 分別以 8 除之得餘數爲 3 與 4，求
(1) $x + y$ 以 8 除之的餘數.
(2) xy 以 8 除之的餘數.

解：令 $x=8q_1+3,\ y=8q_2+4$,

(1) $x+y=(8q_1+3)+(8q_2+4)=8(q_1+q_2)+7$

$\therefore x+y$ 以 8 除之的餘數爲 7

(2) $xy=(8q_1+3)(8q_2+4)$

$=64q_1q_2+32q_1+24q_2+12$

$=8(8q_1q_2+4q_1+3q_2+1)+4$

$\therefore xy$ 以 8 除之的餘數爲 4

$\boxed{\text{演練 2}}$

已知 6666666, 55555 及 88888 除以 9 之餘數分別爲 6, 7, 4, 則 $6666666\times55555+88888$ 除以 9 之餘數爲何？

解：$\because 6\times7+4=46$

又 $46=9\times5+1$ $\therefore$所求餘數爲 1

重點歸納二：因數與倍數

1. 因數與倍數：設 a, b, c 爲整數，若 $a=bc$ 且 $b\neq 0$，則稱 a 爲 b 的倍數，b 爲 a 的因數，記爲 $b\,|\,a$.
   例如：(1) $2|6,\ 5|0,\ -3|9,\ 6|-12$.
   (2)36 的所有因數爲 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm12,\ \pm18,\ \pm36$.
2. 常見之因數、倍數判別法：
   (1)2 的倍數 ⇔ 個位數爲偶數，例：846.
   (2)3 的倍數 ⇔ 數字和爲 3 的倍數，例：1236.（$\because 1+2+3+6=12$ 爲 3 的倍數）
   (3)4 的倍數 ⇔ 末二位數是 4 的倍數，例：57<u>84</u>.
   (4)5 的倍數 ⇔ 末位數是 0 或 5，例：85, 100.
   (5)9 的倍數 ⇔ 數字和爲 9 的倍數，例：12321.（$\because 1+2+3+2+1=9$ 爲 9 的倍數）
   (6)11 的倍數 ⇔（奇位數字之和）－（偶位數字之和）爲 11 的倍數，例：12320.
   （$\because (1+3+0)-(2+2)=0$ 爲 11 的倍數）

《倍數的判別》

範例 3

有一個 7 位數 432□905

(1)若它是 3 的倍數，則□可以填入哪些數字？

(2)若它是 11 的倍數，則□可以填入哪些數字？

解：(1) $\because 4+3+2+\square+9+0+5=23+\square$ 爲 3 的倍數

$\therefore \square=1,\ 4,\ 7$

(2) $\because$ 奇位數字和 $=5+9+2+4=20$，

偶位數字和 $=0+\square+3=3+\square$

又 $20-(3+\square)=17-\square$ 爲 11 的倍數 $\therefore \square=6$

演練 3

若六位數 $92a92b$ 可被 9 整除，則 $a+b$ 之值可能爲

(1)1 (2)3 (3)5 (4)7 (5)9

解：若 $92a92b$ 可被 9 整除

則 $9+2+a+9+2+b$ 可被 9 整除

所以 $22+(a+b)$ 可被 9 整除

當 $a+b=1$，則 $22+(a+b)=23$

當 $a+b=3$，則 $22+(a+b)=25$

當 $a+b=5$，則 $22+(a+b)=27$ 可被 9 整除

當 $a+b=7$，則 $22+(a+b)=29$

當 $a+b=9$，則 $22+(a+b)=31$

故選(3)

重點歸納三：因數線性組合定理

1. 因數性質：設 a, b, c 為整數，若 $a\mid b$ 且 $b\mid c$，則 $a\mid c$.
   證明：$\because a\mid b$ $\therefore$存在整數 x 使得 $b=ax$ $\because b\mid c$ $\therefore$存在整數 y 使得 $c=by$
   所以 $c=(ax)y=a(xy)$，故 $a\mid c$
2. 因數線性組合定理：設 a, b, c 為整數，若 $c\mid a$，$c\mid b$，則 $c\mid ma\pm nb$（其中 m, n 為任取的整數）.
   證明：$\because c\mid a$ $\therefore$存在整數 x 使得 $a=cx$ $\because c\mid b$ $\therefore$存在整數 y 使得 $b=cy$
   所以 $ma\pm nb=mcx\pm ncy=c(mx\pm ny)$，故 $c\mid ma\pm nb$

※註：為了方便起見，往後我們將用符號 $\boldsymbol{Z}$ 表整數，$\boldsymbol{N}$ 表正整數（自然數），而符號 $\in$ 表示「屬於」的意思.

《因數線性組合》

範例 4

(1)設 a，$b\in\boldsymbol{Z}$ 且 $a>1$，若 $a\mid 5b+7$ 且 $a\mid 3b+2$，則 $a=$？

(2)設 $n\in\boldsymbol{N}$，已知 $\dfrac{6n-4}{2n+3}$ 為整數，則 $n=$？

解：(1) $\because a\mid 5b+7$，$a\mid 3b+2$

$\therefore a\mid 3(5b+7)-5(3b+2)$

$\Rightarrow a\mid 11$ 又 $a>1$ $\therefore a=11$

(2) 由題意得 $2n+3\mid 6n-4$

又 $2n+3\mid 2n+3$

$\therefore 2n+3\mid (-1)(6n-4)+3(2n+3)$

$\Rightarrow 2n+3\mid 13$

又 $2n+3>3$（$\because n\in\boldsymbol{N}$）

$\therefore 2n+3=13$ 故 $n=5$

演練 4

(1)設 $k\in\boldsymbol{Z}$，若 $\dfrac{5k+7}{k}\in\boldsymbol{Z}$，則 $k=$？

(2)設 $n\in\boldsymbol{N}$，滿足 $2n+3\mid 3n+7$，求 n 之值？

解：(1) $\because \dfrac{5k+7}{k}\in\boldsymbol{Z}$ $\therefore k\mid 5k+7$

又 $k\mid k$ $\therefore k\mid 1\cdot(5k+7)-5\cdot k \Rightarrow k\mid 7$

$\therefore k=\pm1, \pm7$

(2) $\because 2n+3\mid 3n+7$ 且 $2n+3\mid 2n+3$

$\therefore 2n+3\mid 2(3n+7)-3(2n+3)$

$\Rightarrow 2n+3\mid 5$

又 $2n+3>3$ $\therefore 2n+3=5$ 故 $n=1$

重點歸納四：質數

1. 質數與合成數：設 $p\in\boldsymbol{N}$，$p>1$，若 p 恰只有 1 與 p 二個正因數，則 p 稱為質數；反之，則稱為合成數.

例如：2, 3, 5, 7, 11 皆爲質數, 而 4, 6, 8, 9, 10, …等皆爲合成數.

2. 質數判別法：若 p 沒有小於或等於 $\sqrt{p}$ 的質因數, 則 p 必爲質數.

證明：假設 p 不爲質數, 則必存在 $m,\ n \in \boldsymbol{N}$, 使得 $p = mn$, 其中 m 爲 p 之最小質因數

且 $m \le n$ $\because m \le n$ $\therefore m^2 \le mn = p \Rightarrow m \le \sqrt{p}$

$\therefore$當 p 不是質數時, 必有小於或等於 $\sqrt{p}$ 的質因數,

換言之, 若 p 沒有小於或等於 $\sqrt{p}$ 之質因數, 則 p 必爲質數.

例如：小於或等於 $\sqrt{149} \fallingdotseq 12.\cdots$的質數有 2, 3, 5, 7, 11, 皆不能整除 149

$\therefore$149 爲質數

《質數的判別》

範例 5

下列各數何者爲質數？

(1)667 (2)677 (3)687 (4)767 (5)1547

解：(1) $667=23\times29$，故爲合成數

(2) $p\le\sqrt{667}$ 的質數 p 有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23，分別去除 677，皆不能整除

故 677 爲質數

(3) $687=3\times229$，故爲合成數

(4) $767=13\times59$，故爲合成數

(5) $1547=7\times13\times17$，故爲合成數

故選(2)

演練 5

下列何者爲質數？

(1)321 (2)91 (3)299 (4)437 (5)1069

解：(1) $321=3\times107$ (2) $91=7\times13$

(3) $299=13\times23$ (4) $437=19\times23$

(5) $\sqrt{1069}=32.\cdots$

小於 32 的質數有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31，都不是 1069 的因數

$\therefore$1069 爲質數

故選(5)

重點歸納五：最大公因數、最小公倍數與因數分解法

1. 最大公因數：整數 a 和 b 的正公因數中最大的一個，稱爲 a 與 b 的最大公因數，以符號 $(a,\ b)$ 表之.
2. 互質：設 $a,\ b\in\mathbf{Z}$，若 $(a,\ b)=1$，則稱 a 與 b 互質.
   例如：4 與 9 互質，1 與 8 互質.
3. 最小公倍數：整數 a 和 b 之正公倍數中最小的一個，稱爲 a 與 b 的最小公倍數，以符號 $[a,\ b]$ 表之.
4. 因數分解法：將各整數分解成質因數的連乘積，再觀察各質因數之次數高低來決定最大公因數及最小公倍數.

《因數分解求最大公因數、最小公倍數》

範例 6

(1)若 $a=2^3\cdot3^2\cdot6^4\cdot7^2$，$b=2^5\cdot6^3\cdot7^5$，求 $(a,\ b)$ 及 $[a,\ b]=$？

(2)求 $(6600,\ 1260,\ 2352)=$？

$[6600,\ 1260,\ 2352]=$？

解：(1) $\because a=2^3\cdot3^2\cdot(2\cdot3)^4\cdot7^2=2^7\cdot3^6\cdot7^2$

$b=2^5\cdot(2\cdot3)^3\cdot7^5=2^8\cdot3^3\cdot7^5$

$\therefore(a,\ b)=2^7\cdot3^3\cdot7^2$

$[a,\ b]=2^8\cdot3^6\cdot7^5$

(2) $\because 6600=2^3\cdot3\cdot5^2\cdot11$

$1260=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$

$2352=2^4\cdot3\cdot7^2$

$\therefore(6600,\ 1260,\ 2352)=2^2\cdot3=12$

$[6600,\ 1260,\ 2352]=2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot11$

$\boxed{\text{演練 6}}$

(1)設 $a=10^2\cdot11^2\cdot12^2$, $b=7^2\cdot8^2\cdot9^2$, $c=6^3\cdot8^2\cdot10^2$，求 $(a,\ b,\ c)$ 及 $[a,\ b,\ c]=$ ？

(2)求 $(5940,\ 20328)=$ ？

$[5940,\ 20328]=$ ？

解：(1) $\because a=(2\cdot5)^2\cdot11^2\cdot(2^2\cdot3)^2=2^6\cdot3^2\cdot5^2\cdot11^2$

$b=7^2\cdot(2^3)^2\cdot(3^2)^2=2^6\cdot3^4\cdot7^2$

$c=(2\cdot3)^3\cdot(2^3)^2\cdot(2\cdot5)^2=2^{11}\cdot3^3\cdot5^2$

$\therefore(a,\ b,\ c)=2^6\cdot3^2$

$[a,\ b,\ c]=2^{11}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2$

(2) $\because 5940=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot11$

$20328=2^3\cdot3\cdot7\cdot11^2$

$\therefore(5940,\ 20328)=2^2\cdot3\cdot11=132$

$[5940,\ 20328]=2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11^2$

重點歸納六：輾轉相除法

1. 輾轉相除法：設 a, b 爲正整數，若 $a = bq + r,\ 0 \le r < b$，則 $(a,\ b) = (b,\ r)$.

   證明：設 $(a,\ b) = d$，$(b,\ r) = e$，

   (1)先證 $d \le e$

   $\because (a,\ b) = d$，$\therefore d \mid a,\ d \mid b$，$\therefore d \mid a - bq$，$\therefore d \mid r$，又 $d \mid b$

   $\therefore d$ 爲 b, r 的公因數，$\therefore d \mid e$，$\therefore d \le e$

   (2)再證 $e \le d$

   $\because (b,\ r) = e$，$\therefore e \mid b,\ e \mid r$，$\therefore e \mid bq + r$，$\therefore e \mid a$，又 $e \mid b$

   $\therefore e$ 爲 a, b 的公因數，$\therefore e \mid d$，$\therefore e \le d$

   由(1), (2)得 $d = e$，$\therefore (a,\ b) = (b,\ r)$

2. 設 a, b 爲正整數，則 $(a,\ b) \cdot [a,\ b] = ab$.

   例如：$(4,\ 6) = 2,\ [4,\ 6] = 12$，顯然，$(4,\ 6) \cdot [4,\ 6] = 4 \cdot 6$

《輾轉相除法》

範例 7

(1)利用輾轉相除法求 $(4369,\ 5911) = ?$

(2)承上題，若將 $\dfrac{1}{4369} + \dfrac{1}{5911}$ 化爲最簡分數，則其分母爲何？

解：(1)

2	4369	5911	1
	3084	4369	
5	1285	1542	1
	1285	1285	
	0	257	

$\therefore (4369,\ 5911) = 257$

(2) $\because [4369,\ 5911] = \dfrac{4369 \times 5911}{257} = 17 \times 5911 = 100487$

$\therefore$ 原式 $= \dfrac{17 + 23}{100487} = \dfrac{40}{100487}$ 爲最簡分數

故分母爲 100487

演練 7

求 $(3432,\ 182) = ?\ [3432,\ 182] = ?$

解：

18	3432	182	1
	3276	156	
6	156	26	
	156		
	0		

$\therefore (3432,\ 182) = 26$

$[3432,\ 182] = \dfrac{3432 \times 182}{26} = 24024$

《 $a=bq+r \Rightarrow (a,\ b)=(b,\ r)$ 》

範例 8

設 $a,\ b,\ q_1,\ q_2,\ q_3$ 皆爲正整數，且

$$\begin{cases} a=bq_1+4098 \\ b=4098q_2+582 \\ 4098=582q_3+24 \end{cases}，求 (a,\ b)=?$$

解：由輾轉相除法得

$(a,\ b)=(b,\ 4098)=(4098,\ 582)=(582,\ 24)=6$

演練 8

設 x, y, a, b, c 皆爲正整數，且

$$\begin{cases} x=ya+7848 \\ y=7848b+387 \\ 7848=387c+108 \end{cases}，求 (x,\ y)=?$$

解：$(x,\ y)=(y,\ 7848)=(7848,\ 387)=(387,\ 108)=9$

重點歸納七：公因數與公倍數的性質

1. 設 a, b 爲正整數且 $(a,\ b)=d$，則可令 $a=dh,\ b=dk$，其中 $(h,\ k)=1$，且 $[a,\ b]=dhk$.
2. 若 $(a,\ b)=1$，則 $(a+b,\ ab)=1$ 且 $(a-b,\ ab)=1$.

   例如：$(7,\ 3)=1$

   顯然 $(7+3,\ 7\times3)=(10,\ 21)=1$，而且 $(7-3,\ 7\times3)=(4,\ 21)=1$

《 $(a,\ b)=d \Rightarrow a=dh,\ b=dk$，其中 $(h,\ k)=1$ 》

範例 9

設 a, b 爲正整數，若 $(a,\ b)=9,\ a+b=180$，則 $[a,\ b]$ 之最大值爲何？

解：令 $a=9h,\ b=9k$，其中 $(h,\ k)=1$

$\because a+b=180 \Rightarrow 9h+9k=180 \Rightarrow h+k=20$

$\therefore$

h	1	19	3	17	7	13	9	11
k	19	1	17	3	13	7	11	9

顯然 hk 最大值爲 $9\times11=99$

此時 $[a,\ b]=9hk=9\times99=891$

演練 9

若 a, b 爲正整數，$a<b$，$(a,\ b)=8$ 且 $ab=960$，求 a 與 b.

解：令 $a=8h,\ b=8k$，其中 $(h,\ k)=1$

$\because ab=960 \Rightarrow 8h\cdot8k=960 \Rightarrow hk=15$

又 $a<b \quad \therefore h<k$

$\therefore \begin{cases} h=1 \\ k=15 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h=3 \\ k=5 \end{cases}$

故 $a=8,\ b=120$ 或 $a=24,\ b=40$

題型一〈農曆記年問題〉

範例 10

我國農曆以天干（甲乙丙丁戊己庚辛壬癸），地支（子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥）記年，即甲子，乙丑，丙寅，丁卯，⋯，癸酉，甲戌，乙亥，⋯，癸未，甲申，⋯，以 60 年爲一週期，俗稱一甲子，已知民國 88 年爲己卯，問

(1)民國 31 年的農曆記年是______年.　(2)民國 128 年的農曆記年是______年.

解：(1)$\because 88-31=57$，又 $57\div10=5\cdots7$　∴ 天干由己往前推 7 年得壬年

又 $57\div12=4\cdots9$，∴　地支由卯往前推 9 年得午年，故民國 31 年爲壬午年

(2)$\because 128-88=40$，又 $40\div10=4\cdots0$　∴天干仍以己記年

又 $40\div12=3\cdots4$，∴　地支由卯往後推 4 年得未年，故民國 128 年爲己未年

類題 1

下列哪些資料從未用過？　(1)甲丑　(2)丙卯　(3)戊寅　(4)癸巳　(5)辛辰

解：記年方式爲奇數配奇數，偶數配偶數

∴$\underset{(奇偶)}{甲丑}$，$\underset{(奇偶)}{丙卯}$，$\underset{(偶奇)}{辛辰}$ 從未用過

故選(1)(2)(5)

類題 2

如果民國 84 年爲乙亥年，則民國 120 年爲<u>　辛亥　</u>年

解：$\because 120-84=36$

∴天干：$36\div10=3\cdots6$，由乙往後推 6 年爲辛年

地支：$36\div12=3\cdots0$，仍爲亥年

故民國 120 年爲辛亥年

題型二〈二位合成數倍數的問題〉

Q 之倍數：設 Q 爲二位數，$Q=a\times b$ 且 $(a,\ b)=1$，某數若爲 Q 之倍數，其必爲 a 與 b 之倍數.

例如：18 的倍數：是 2 的倍數且是 9 的倍數.

範例 11

六位數 $12a49b$ 爲 36 的倍數，則此六位數爲何？

解：$\because 36=4\times9$ 且 $(4,\ 9)=1$　∴此六位數爲 4 與 9 的倍數

(i)$\because 12a49b$ 爲 4 的倍數　$\therefore b=2$ 或 6

(ii)$\because 12a49b$ 爲 9 的倍數　$\therefore 1+2+a+4+9+b=16+a+b$ 爲 9 的倍數 $\Rightarrow$ $a+b=2$ 或 11

當 $b=2$ 時，$a=0$ 或 9.　當 $b=6$ 時，$a=5$.

∴此六位數爲 120492, 129492, 125496

類題

五位數 $a358b$ 為 45 的倍數，則數對 $(a,\ b)=$ __(2, 0)及(6, 5)__.

解：$\because 45=5\times 9$ 且 $(5,\ 9)=1$

$$\therefore \begin{cases} 5\,|\,a358b \Rightarrow b=0 \text{ 或 } 5 \\ 9\,|\,a358b \Rightarrow 9\,|\,a+3+5+8+b \end{cases}$$

$\Rightarrow 9\,|\,a+b+16 \Rightarrow a+b=2$ 或 11

當 $b=0$ 時，$a=2$

當 $b=5$ 時，$a=6$

$\therefore$ 所求為 $(2,\ 0)$ 及 $(6,\ 5)$

題型三〈質數的正因數只有 1 與自己本身〉

範例 12

設 $n\in \boldsymbol{N}$，若 $p=n^4-38n^2+169$ 為質數，求此質數 p.

解：$\because\ n^4-38n^2+169=n^4+26n^2+169-64n^2$

$=(n^2+13)^2-(8n)^2$

$=(n^2+8n+13)(n^2-8n+13)$

又 $n^2+8n+13>n^2-8n+13$ 且 p 為質數

$\therefore\ n^2-8n+13=1$

$\Rightarrow\ (n-2)(n-6)=0\quad \therefore n=2$ 或 6

當 $n=2$ 時 $p=33=3\times 11$（不合）

當 $n=6$ 時 $p=97$（合）

故 $p=97$

類題

設 $n\in \boldsymbol{Z}$，若 $p=4n^2-9n-9$ 為質數，求 $p=$ __19__.

解：$\because\ p=4n^2-9n-9=(n-3)(4n+3)$ 且 p 為質數

$\therefore n-3=1,\ -1$ 或 $4n+3=1,\ -1$，

解得 $n=4,\ 2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}$（不合）

當 $n=4$ 時，$p=19$（合）

當 $n=2$ 時，$p=-11$（不合）

當 $n=-1$ 時，$p=4$（不合）

故 $p=19$

題型四〈正因數的個數與標準分解式〉

任何大於 1 的正整數 n，皆可表成質因數的連乘積爲 $n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot P_3^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot P_n^{\alpha_n}$，其中 P_1，P_2，$\cdots$，P_n 爲相異質因數，則此式稱爲 n 的標準分解式，而且

1. n 之正因數個數共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$ 個.

2. n 之正因數總和爲 $(1+P_1^1+P_1^2+\cdots+P_1^{\alpha_1})(1+P_2^1+P_2^2+\cdots+P_2^{\alpha_2})\cdots(1+P_n^1+P_n^2+\cdots+P_n^{\alpha_n})$

3. n 之正因數之積 $= n^k$，其中 $k = \dfrac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$.

範例 13

360 之

(1)標準分解式為______.

(2)正因數共有______個；其總和為______.

(3)所有正因數之積為______.

(4)正因數中, 15 的倍數共有______個.

(5)正因數中, 完全平方數有______個.

解：(1) $360=2^3\cdot3^2\cdot5$

(2) $(3+1)(2+1)(1+1)=24$ 個, 而和為 $(1+2^1+2^2+2^3)(1+3^1+3^2)(1+5^1)=1170$

(3)360 的所有正因數為 $\left.\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & 18\\ 360, & 180, & 120, & \cdots, & 20\end{matrix}\right\}$ 共 12 對

$\Rightarrow$ 相乘得 360^{12}

(4) $\because 360=15\cdot(2^3\cdot3)$

$\therefore$ 所求 $=(3+1)(1+1)=8$ 個

(5) $\because$ 正因數型如 $2^\alpha\times3^\beta\times5^\gamma$

若為完全平方數, 則 $\alpha=0,\ 2$; $\beta=0,\ 2$; $\gamma=0$

$\therefore$ 共有 $2\times2\times1=4$ 個

類題

3528 之

(1)正因數有__36__個；其總和為__11115__.

(2)正因數的乘積為__3528^{18}__.

(3)正因數中, 14 的倍數有__18__個.

(4)正因數中, 完全平方數有__8__個.

解：$\because 3528=2^3\cdot3^2\cdot7^2$

(1) $(3+1)(2+1)(2+1)=36$ 個, 而和為 $(1+2^1+2^2+2^3)(1+3^1+3^2)(1+7^1+7^2)=11115$

(2) 3528^{18}

(3) $\because 3528=14\cdot(2^2\cdot3^2\cdot7)$ $\quad\therefore$ 所求為 $(2+1)(2+1)(1+1)=18$ 個

(4) $\because$ 正因數型如 $2^\alpha,\ 3^\beta,\ 7^\gamma$

若為完全平方數, 則 $\alpha=0,\ 2$; $\beta=0,\ 2$; $\gamma=0,\ 2$

$\therefore$ 共有 $2\times2\times2=8$ 個

題型五〈利用輾轉相除法求整數解〉

範例 14

試找出一組 $x,\ y\in \mathbf{Z}$，使得 $4176x+1566y=(4176,\ 1566)$.

解：〈方法一〉 $\because \begin{cases}4176=1566\cdot 2+1044\\ 1566=1044\cdot 1+522\end{cases}$

$\therefore 522=1566-1044\cdot 1=1566-(4176-1566\cdot 2)\cdot 1=4176\cdot(-1)+1566\cdot 3$

故可取 $x=-1,\ y=3$

2	4176	1566	1
	3132	1044	
2	1044	522	
	1044		
	0		

〈方法二〉令 $a=4176,\ b=1566$

$\because$

a	4176	1566	b
$2b$	3132	1044	$a-2b$
$a-2b$	1044	522	$-a+3b$
	1044		
	0		

由表可知 $522=-a+3b$，故 $x=-1,\ y=3$

類題

試找出一組整數 x, y 使得 $611x+235y=(611,\ 235)$. $\underline{\ x=2,\ y=-5\ }$

解：令 $a=611,\ b=235$

a	611	235	b
$2b$	470	141	$a-2b$
$a-2b$	141	94	$-a+3b$
$-a+3b$	94	94	$4a-10b$
$2a-5b$	47	0	$-5a+13b$

$\Rightarrow 2a-5b=47=(611,\ 235)\ \Rightarrow\ x=2,\ y=-5\ \Rightarrow\ (x,\ y)=(2,\ -5)$

充電站

利用因式來求整數解

研究一

(1)求滿足 $xy-2x+3y=11$ 之正整數解？

(2)設 $x\in \boldsymbol{N}$ 且 $\sqrt{4x^2-11}\in \boldsymbol{N}$，則 $x=$ ？

解：(1)原式 $\Rightarrow\ (x+3)(y-2)=5\ \Rightarrow\ \begin{array}{c|c|c} x+3 & 1 & 5 \\ \hline y-2 & 5 & 1 \end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{c|c|c} x & -2 & 2 \\ \hline y & 7 & 3 \end{array}$，

故 $x=2,\ y=3$

(2)令 $\sqrt{4x^2-11}=k$，則 $4x^2-11=k^2\ \Rightarrow\ 4x^2-k^2=11\ \Rightarrow\ (2x+k)(2x-k)=11$

$\therefore \begin{array}{c|c|c} 2x+k & 1 & 11 \\ \hline 2x-k & 11 & 1 \end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 3 \\ \hline k & -5 & 5 \end{array}$，故 $x=3$

一、基本題

1. 以下題目對的打○，錯的打╳.
（╳）(1)設 $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$，若 $a \mid bc$，則 $a \mid b$ 或 $a \mid c$.
（╳）(2)設 $a \in \boldsymbol{Z}$，若 $a \mid 85+51$，則 $a \mid 85$ 或 $a \mid 51$.
（╳）(3)設 $n \in \boldsymbol{N}$，若 $4 \mid n^2$，則 $4 \mid n$.
（○）(4)設 $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$，若 $a \mid b$ 且 $a \mid c$，則 $a \mid b^2 - c^2$.
解：(1) $4 \mid 12 = 2\times 6$，但 $4 \nmid 2$ 且 $4 \nmid 6$
(2)取 $a=2$，則 $2 \mid 85+51$，但 $2 \nmid 85$ 且 $2 \nmid 51$
(3)令 $n=2$，則 $4 \mid 2^2$，但 $4 \nmid 2$
(4) $\because a \mid b$ 且 $a \mid c$
$\therefore a \mid b-c$ 　又 $b^2 - c^2 = (b+c)(b-c)$
$\therefore a \mid b^2 - c^2$

2. 下列何者爲質數？
(1)157 　(2)271 　(3)361 　(4)1001 　(5) $11^3 + 2^3$
解：(3) $361 = 19^2$
(4) $1001 = 11\times 91$
(5) $11^3 + 2^3 = (11+2)(11^2 - 11\times 2 + 2^2)$

3. 若 a, b, q, r 爲正整數且 $a = bq + r$，則下列選項何者爲真？
(1) $(a, b) = (b, r)$
(2) $(a, b) = (q, r)$
(3) $(a, q) = (b, r)$
(4) $(a, q) = (q, r)$
(5) $(a, r) = (b, q)$
解：由輾轉相除法得 $(a, b) = (b, r)$，$(a, q) = (q, r)$.

4. 設 x, y, z 爲正整數，若 $(x, y) = 21$，$(y, z) = 56$，則 $(x, y, z) =$ ？
(1)1 　(2)7 　(3)9 　(4)21 　(5)28
解：$(x, y, z) = ((x, y), (y, z)) = (21, 56) = 7$.

5. 設正整數 x, y 除以 13 的餘數分別爲 9 與 7，求
(1) $3x+y$ 除以 13 的餘數____8____.
(2) x^2+y 除以 13 的餘數____10____.

解：令 $x=13q_1+9,\ \ y=13q_2+7$

(1) $3x+y=3(13q_1+9)+(13q_2+7)$

$=39q_1+13q_2+34$

$=13(3q_1+q_2+2)+8$

$\therefore$餘數爲 8

(2) $x^2+y=(13q_1+9)^2+(13q_2+7)$

$=169{q_1}^2+13\cdot18\cdot q_1+13q_2+88$

$=13(13{q_1}^2+18q_1+q_2+6)+10$

$\therefore$餘數爲 10

6. 設 $m,\ n\in \boldsymbol{N}$，若 $m\,|\,35n+26,\ \ m\,|\,7n+3$，則 $m=$____1 或 11____.
解：$\because\ m\,|\,(35n+26)-5(7n+3)=11$
$\therefore\ m=1$或 11

7. 中國人習慣以 12 生肖來計年齡, 12 生肖依序爲鼠、牛、虎、兔、龍、蛇、馬、羊、猴、雞、狗、豬，已知弟弟屬馬，哥哥大弟弟 8 歲，則哥哥生肖屬____狗____.
解：馬往前推 8 年得狗

8. 設 $x\in \boldsymbol{N}$, 208 除以 x 餘 10, 880 除以 x 餘 22，則 $x=$____33 或 66____.
解：$\because\ 208-10=198,\ \ 880-22=858$
$\therefore\ x\,|\,(198,\ 858)\ \Rightarrow\ x\,|\,66$
但 $x>22$，故 $x=33$或 66

9. $2^{20}-1$與$2^{19}+1$之最大公因數爲____3____.

解：令 $(2^{20}-1,\ \ 2^{19}+1)=d$

則 $d\,|\,2^{20}-1$且 $d\,|\,2^{19}+1$

$\Rightarrow\ d\,|\,1\cdot(2^{20}-1)-2(2^{19}+1)$

$\Rightarrow\ d\,|\,-3\ \Rightarrow\ d=3$

10. 若 a 爲大於 1000 的正整數，且被 465 除後的餘數爲 30，則 $(a, 465) =$ __15__.
解：$(a, 465) = (465, 30) = 15$

11. 素還真趕鴨子去覓食，已知原有 20000 隻，回來後每 5 隻一數，每 9 隻一數，每 13 隻一數，每 17 隻一數，都剩下 3 隻，如果走失的鴨子不會超過 200 隻，共走失了__107__隻鴨子.

解：設回來了 x 隻鴨子，由題意知 $x-3$ 為 5, 9, 13, 17 的倍數，又 $[5,\ 9,\ 13,\ 17]=9945$

$\therefore$ 令 $x-3=9945k$，其中 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

而取 $k=2$ 時最接近 20000,

此時 $x=9945\times 2+3=19893$

$\therefore$ 走失了 $20000-19893=107$ 隻鴨子

二、挑戰題

12. 下列哪些數是 9 的倍數？

(1)247023846　(2)645×7329　(3)3^{101}　(4)986^3+814^3　(5)$10^{90}+1$

解：(1)因 $2+4+7+0+2+3+8+4+6=36$ 是 9 的倍數，故(1)對

(2)因 $6+4+5=15$ 是 3 的倍數

又 $7+3+2+9=21$ 是 3 的倍數

$\therefore$ 645×7329 是 $3\times 3=9$ 的倍數，故(2)對

(3)顯然 $9=3^2$ 是 3^{101} 的因數，故(3)對

(4)$986^3+814^3=(986+814)(986^2-986\times 814+814^2)$

因 $986+814=1800$ 是 9 的倍數，故(4)對

(5)$10^{90}+1$ 的數字和是 $1+1=2$ 不是 9 的倍數，故錯

13. 已知 $a,\ b\in \boldsymbol{N}$ 且 $a>b$，若 $a-5b=91$ 且 $b-132\times 91=14$，則 $(a,\ b)=$__7__.

解：$\because a=b\cdot 5+91 \Rightarrow (a,\ b)=(b,\ 91)$

又 $b=91\cdot 132+14 \Rightarrow (b,\ 91)=(91,\ 14)$

$\therefore (a,\ b)=(91,\ 14)=7$

14. 設 $a,\ b\in \boldsymbol{N}$，若 $a-b=34,\ [a,\ b]=255$，求

(1)a 與 b 的最大公因數__17__.

(2)a, b 之值__85, 51__.

解：(1)令 $(a,\ b)=d$ 且 $a=dh,\ b=dk$，其中 $(h,\ k)=1$

$$\because \begin{cases} a-b=34 \\ [a,\ b]=255 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dh-dk=34 \\ dhk=255 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(h-k)=34 \\ d\cdot hk=255 \end{cases}$$

$\because (h,\ k)=1 \quad \therefore (h-k,\ hk)=1$

$\therefore d=(34,\ 255)=17$

(2)$\because \begin{cases} h-k=2 \\ hk=15 \end{cases} \Rightarrow h=5,\ k=3$

故 $a=85,\ b=51$

歷屆大考試題觀摩

1. 已知「偶數的平方是 4 的倍數；奇數的平方除以 4 餘數為 1」. 考慮五個數：513, 226, 216, 154, 145. 試問下列何者可以和上述五數中的某一數相加成為完全平方數？

(1)513 (2)226 (3)216 (4)154 (5)145 【87 學測】

解：完全平方數被 4 除之，餘數必為 0 或 1，但反之則不然

而 513, 226, 216, 154, 145 被 4 除之的餘數分別為 1, 2, 0, 2, 1

故若用 513 與上述五數相加，欲得完全平方數可能的數只有 216

而 $513+216=729=(27)^2$ $\therefore$513 合

同理，226 只可能加 226 或 154，但皆不合

216 只可能加 513, 216 或 145,

而 $216+145=361=(19)^2$

$\therefore$216 及 145 皆合，154 經檢查亦不合

由上知可選(1)(3)(5)

2. 今年（公元 2000 年是閏年）的 1 月 1 日是星期六. 試問下一個 1 月 1 日也是星期六，發生在公元哪一年？答：__2005__. 【89 學測】

解：2000 年有 366 天除以 7 餘 2

2001 年有 365 天除以 7 餘 1

2002 年有 365 天除以 7 餘 1

2003 年有 365 天除以 7 餘 1

2004 年有 366 天除以 7 餘 2

$2+1+1+1+2=7$ 為 7 的倍數

$\therefore$2000 年元旦與 2005 年元旦同為星期六

3. 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}$ 為整數？

(1)1 個 (2)2 個 (3)3 個 (4)4 個 (5)5 個 【92 學測】

解：$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}=\frac{55}{n}$ 為整數

$\Rightarrow$ $n\,|\,55$ 且 $n\in \boldsymbol{N}$

$\Rightarrow$ $n=1,\ 5,\ 11,\ 55$ 共 4 個

4. 某高中招收高一新生共有男生 1008 人、女生 924 人報到.學校想將他們依男女合班的原則平均分班，且要求各班有同樣多的男生，也有同樣多的女生；考量教學效益，並限制各班總人數在 40 與 50 人之間，則共分成__42__班. 【93 學測】

解：設班級數為 n，新生總人數為 $1008+924=1932$ 人

$\because$各班人數在 40 與 50 人之間

$\therefore \frac{1932}{50}\le n\le\frac{1932}{40}$ $\Rightarrow$ $38.64\le n\le 48.3\cdots\cdots①$

又每班男、女生人數皆相同

$\Rightarrow$ 班級數 n 必為 1008 與 924 之公因數

最大公因數 $(1008,\ 924) = 84$

$\therefore n \mid 84$……②

由①, ②可得 $n = 42$ $\therefore$分成 42 班

5. 試問整數 43659 共有多少個不同的質因數？

(1)1 個 (2)2 個 (3)3 個 (4)4 個 (5)5 個 【94 學測】

解：$\because 4+3+6+5+9=27$ $\therefore$43659 為 9 的倍數

$$\Rightarrow 43659 = 9\times 4851 = 9\times 9\times 539 = 3^4\times 7^2\times 11$$

$\therefore$43659 有三個質因數, 故選(3)

6. 假設 a, b, c 是三個正整數, 若 25 是 a, b 的最大公因數, 且 3, 4, 14 都是 b, c 的公因數, 則下列何者正確？

(1) c 一定可以被 56 整除

(2) $b \geq 2100$

(3)若 $a \leq 100$, 則 $a = 25$

(4) a, b, c 三個數的最大公因數是 25 的因數

(5) a, b, c 三個數的最小公倍數大於或等於 $25\times 3\times 4\times 14$. 【95 學測】

解：(1)╳ 例如：$c = 84$

(2)○ $\because [25,\ 3,\ 4,\ 14] = 2100$ $\therefore b \geq 2100$

(3)○ $\because a$ 最小是 25, 且 a 不可為 2, 3, 7 的倍數

(4)○ $\because (a,\ b,\ c) \mid (a,\ b)$

(5)╳ 例如：$a = 25,\ b = 25\times 3\times 4\times 7,\ c = [3,\ 4,\ 14] = 84$

則 $[a,\ b,\ c] = 25\times 84 = 2100 < 25\times 3\times 4\times 14$

7. 將正整數 18 分解成兩個正整數的乘積有1×18, 2×9, 3×6三種, 又3×6是這三種分解中, 兩數的差最小的, 我們稱3×6爲 18 的最佳分解. 當 $p\times q$ ($p\le q$)是正整數 n 的最佳分解時, 我們規定函數 $F(n)=\dfrac{p}{q}$, 例如 $F(18)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$. 下列有關函數 $F(n)$ 的敘述, 何者正確?

(1) $F(4)=1$

(2) $F(24)=\dfrac{3}{8}$

(3) $F(27)=\dfrac{1}{3}$

(4)若 n 是一個質數, 則 $F(n)=\dfrac{1}{n}$

(5)若 n 是一個完全平方數, 則 $F(n)=1$ 【95 學測】

解:(1)○ $\because F(4)=\dfrac{2}{2}=1$

(2)╳ $\because F(24)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(3)○ $\because F(27)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(4)○ $\because n=1\times n \quad \therefore F(n)=\dfrac{1}{n}$

(5)○ $\because$若 $n=a\cdot a$ 則 $F(n)=\dfrac{a}{a}=1$

8. (1)將 48510 分解成質因數的乘積 $\underline{\quad 2\times3^2\times5\times7^2\times11 \quad}$.

(2)寫出在 1 和 250 之間且與 48510 互質的所有合數 $\underline{\quad 169, 221, 247 \quad}$(合數就是比 1 大而不是質數的整數). 【95 指考甲】

解:(1)
$$\begin{array}{r|l} 2 & 48510 \\ \hline 3 & 24255 \\ \hline 3 & 8085 \\ \hline 5 & 2695 \\ \hline 7 & 539 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

$\therefore 48510=2\times3^2\times5\times7^2\times11$

(2)除了 2, 3, 5, 7, 11 之外之質數有 13, 17, 19, 23, 29, $\cdots$,
故所求爲$13\times13=169$, $13\times17=221$, $13\times19=247$

9. 中國古代流傳的一本數學書中有下面這段文字（標點符號為現代人所加）：今有多數 21, 少數 15, 問等數幾何？草曰：置 21 於上, 15 於下, 以下 15 除去上 21, 上餘 6；又以上 6 除去下 15, 下餘 3；又以下 3 除去上 6, 適盡, 則下 3 為等數合問. 在上文中「等數」指的是：

(1)兩數之和　(2)兩數之差　(3)兩數之積　(4)兩數之商　(5)兩數之最大公因數　【96 指考乙】

解：由題意得 $21 = 15q_1 + 6,\ 15 = 6q_2 + 3,\ 6 = 3q_3$

其中 q_1, q_2, q_3 表商

由輾轉相除法原理知 $(21,\ 15) = (15,\ 6) = (6,\ 3) = 3$

∴等數為 3, 即為 21, 15 的最大公因數

故選(5)