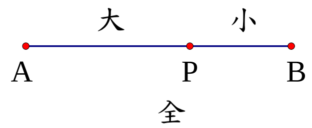
林柏佐

黃金比例

【定義】設 $\overline{AB}$ 為一線段，在 $\overline{AB}$ 取一點 P, 使 $\overline{AP} > \overline{BP}$, 且 $\overline{AP}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AB}$(記憶：大^2 = 小 · 全), 則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ 這個比值稱為黃金分割比，簡稱為黃金比 $\phi, \phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618.$

【意義】一般相信，長寬滿足黃金比的矩形看來最和諧順眼。

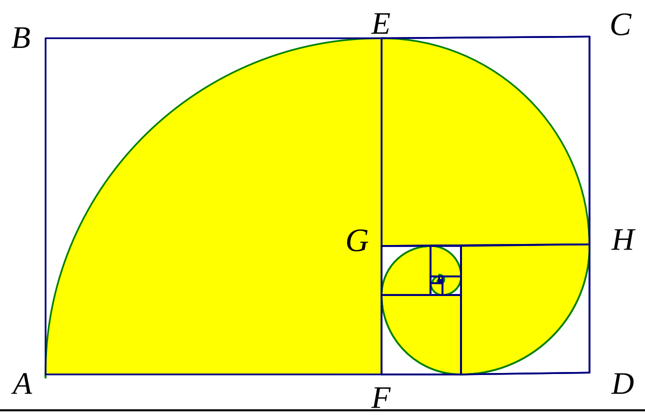
【證明】令 $\overline{AP} = x, \overline{PB} = 1$



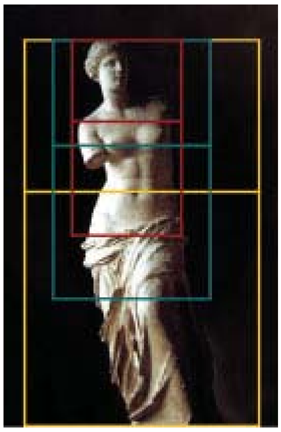
$$\because \overline{AP}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AB}$$
$$\Rightarrow x^2 = 1 \cdot (1+x)$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \cdots ①$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} (- \text{不合})$$
$$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

黃金螺線

【定義】若 $ABCD$ 是一個黃金矩形，在左邊切下正方形 $ABEF$ 後，剩下的矩形 $ECDF$ 也是一個黃金矩形，若再將 $ECDF$ 切下一正方形 $ECHG$, 則剩下的矩形 $FGHD$ 也是一個黃金矩形，如此依順時針方向無限分割下去。在此分割中，以 F 為圓心，$\overline{AF}$ 為半徑作 $\overset{\frown}{AE}$, 再以 G 為圓心，$\overline{GE}$ 為半徑作 $\overset{\frown}{EH}$,$\cdots$ 可得一螺旋狀曲線，稱黃金螺線。如圖



黃金比的表示



一般的圖畫設計，常需要考慮到長與寬的比例問題。通常一幅圖畫太過狹長或方正都不是很適宜，長與寬的比例要適中，才能讓人有舒適、祥和的感覺。自古以來有很多藝術家與建築師都認為黃金比才是最完美的。

很多藝術家在繪畫或雕塑人體的時候很注重四肢以及身體各部分長度的比例。他們認為最適當的比例是肚臍分割人體上、下兩段成黃金分割，且臀部分割膝蓋以上為黃金分割等等，當然，也有令一些人持不同的看法。

圖 米洛的維納斯雕像。

由① $x^2 = x+1 \Rightarrow x = 1+\frac{1}{x}$

在這個式子中，右邊的 x 既然等於左邊的 x, 所以可得

$$x = 1+\frac{1}{x} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$$

$$= \cdots$$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

上面最後一個式子所表示的分數稱為簡單無窮連分數，我們將這個無窮連分數簡記為 $x = [1,1,1,\cdots] = [\bar{1}]$

如果我們考慮這個簡單無窮連分數的"有限項($[\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n\text{個}1}]$)"所成的分數就是簡單有限連分數，他們依次等於

$$1, 1+\frac{1}{1} = 2, 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = 1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}, \cdots$$

即可依次得到分數 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \cdots$ 這些分數的極限極為黃金比 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 換句話說，這些分數構成黃金比 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的近似值。仔細觀察這些分數，可以發現他們分母依次構成 Fibonnaci 數列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$$

而分子是少了上列的第一項 1 的數列。我們可以說這些分數依次是 Fibonnaci 數列的後項與前項之比值。它們的極限就是黃金比。

【定義】令 α 是無理數。如果 α 是一個二次多項式 Ax^2+Bx+C 的根，其中 A,B,C 都是整數且 $A\neq 0$ 則 α 被稱為平方無理數。

由① ϕ 是 x^2-x-1 這個二次多項式的根，$\therefore \phi$ 是一個平方無理數。

事實上，任意的一個平方無理數都可以寫成循環連分數的表示法，讓我們來看看它的作法，如果我們不好求它的二次方程式，或是就算求了，係數不是很好看出其循環的情形，那我們要怎麼做呢？讓我們以 ϕ 為例子：

$$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1+\frac{4}{2(\sqrt{5}+1)}=1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=1+\frac{1}{\phi}=[\bar{1}]$$

它還有平方根的表示(參考用)，一樣的由① ϕ 是 $x^2=1+x$ 的根

$$\Rightarrow x=\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

但一般來說，這個表示法比較無參考價值，因為對於我們的計算或估計都沒有幫助，而且一般來說這樣的表示法，我們也無法確定它的值是否會收斂，因此只是提出來當參考用。