第三單元 方程式與不等式

3-1 方程式

等式 $3+5=8$ 是對的，而等式 $4+5=8$ 是錯的，另一種等式含有未知數，如 $x+5=8$，$t^2-2t+3=6$，稱爲方程式。在方程式 $x+5=8$ 中，x 是未知數，$x=3$ 是此方程式的解，也是唯一的解。而方程式 $t^2-2t+3=6$ 中，t 是未知數，它的解可以求之如下：

$$t^2-2t+3=6$$
$$t^2-2t-3=0$$
$$(t-3)(t+1)=0$$
$$t-3=0 \text{ 或 } t+1=0$$
$$t=3 \text{ 或 } t=-1$$

此方程式恰有兩個解，即 $t=3$ 及 $t=-1$。求出方程式的解，就稱爲解方程式。

例題 1

解方程式：

(1) $\frac{1}{2}x-2=2x+3$　(2) $|x+1|+|2x-3|=6$

$\boxed{解}$

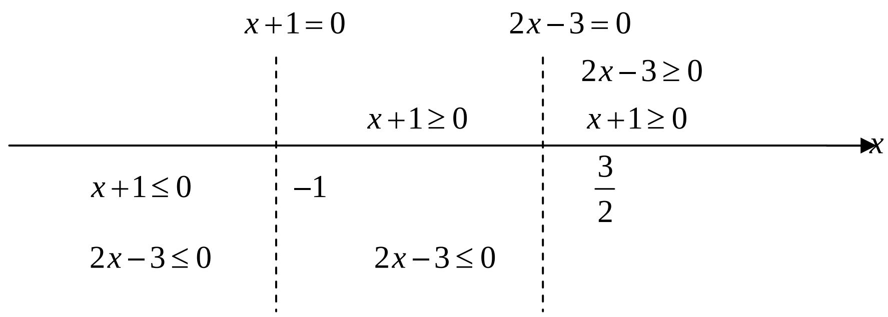
(1) $\frac{1}{2}x-2=2x+3$，$\frac{1}{2}x-2x=3+2$，$-\frac{3}{2}x=5$

$x=5(-\frac{2}{3})$，$x=-\frac{10}{3}$

(2)我們知道：$a\geq 0$ 時，$|a|=a$；$a\leq 0$ 時，$|a|=-a$

又由 $x+1=x-(-1)$，$2x-3=2(x-\frac{3}{2})$

所以可將所有數分成三段如下：



當(i) $x \le -1$時，$x+1 \le 0$，$2x-3 \le 0$，原式成爲

$$-(x+1)-(2x-3)=6，-3x+2=6$$

$$-3x=4，x=-\frac{4}{3}$$

(ii) $-1 \le x \le \frac{3}{2}$時，$x+1 \ge 0$，$2x-3 \le 0$，原式成爲

$$(x+1)-(2x-3)=6，-x+4=6$$

$x=-2$與$x \ge -1$矛盾，故不合

(iii) $x \ge \frac{3}{2}$時，$x+1 \ge 0$，$2x-3 \ge 0$，原式成爲

$$(x+1)+(2x-3)=6，3x-2=6$$

$$3x=8，x=\frac{8}{3}$$

綜合(i)，(ii)，(iii)，得兩解，即$x=-\frac{4}{3}$或$x=\frac{8}{3}$

立即演練

解下列方程式：

(1) $1+\frac{3}{5}x=4-\frac{1}{2}x$　(2) $|x-2|+|3x+4|=5$

方程式$3x^2-5x-2=0$中，x是未知數，3，-5，-2是係數。一般而言，若x是未知數，a，b，c是係數，且$a \neq 0$，則方程式$ax^2+bx+c=0$稱爲一元二次方程式。解一元二次方程式，通常有下列三種方法：

(1) 十字交乘法

(2) 配方法

(3) 公式法

以$3x^2-5x-2=0$爲例，用十字交乘法解之，則

$$\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-6+1=-5} \end{array}$$

故原式可分解爲

$$(3x+1)(x-2)=0$$
$$3x+1=0 \text{ 或 } x-2=0$$
$$x=-\frac{1}{3} \text{ 或 } x=2$$

得到兩解。若用配方法，則

$$3x^2-5x-2=0$$
$$x^2-\frac{5}{3}x=\frac{2}{3}$$
$$x^2-\frac{5}{3}x+(\frac{5}{6})^2=\frac{2}{3}+(\frac{5}{6})^2$$
$$(x-\frac{5}{6})^2=\frac{49}{36}$$
$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{7}{6}$$
$$x=\frac{7}{6}+\frac{5}{6} \text{ 或 } x=-\frac{7}{6}+\frac{5}{6}$$
$$x=2 \text{ 或 } x=-\frac{1}{3}$$

得到同樣的兩個解。比較上面兩個解法，似乎十字交乘法較簡單，但方程式若改爲 $3x^2-5x-1=0$，則十字交乘法便用不上了，而以配方法仍可逐步求得 $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$。

對於一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，我們可以用配方法，在 $b^2-4ac\geq 0$ 的情形下，解出

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

這就是解的公式。將先前的例子 $3x^2-5x-2=0$ 套用此公式，則

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm 7}{6}$$

即 $x=2$ 或 $x=-\frac{1}{3}$。

例題 2

解下列方程式：

(1)$2x^2+8x+5=0$　　(2)$4x|x-2|=3$

$\boxed{\text{解}}$

(1) 優先考慮十字交乘法，但用不上，就用公式解

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{24}}{4}=\frac{-8\pm2\sqrt{6}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{6}}{2}$$

(2)$(i)x\le2$時， $x-2\le0$ ，原式化為

$$4x(-x+2)=3$$

$$4x^2-8x+3=0$$

$$(2x-3)(2x-1)=0$$

$$x=\frac{3}{2}\text{ 或 }x=\frac{1}{2}$$

$(ii)x\ge2$時， $x-2\ge0$ ，原式化為

$$4x(x-2)=3$$

$$4x^2-8x-3=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{112}}{8}=\frac{8\pm4\sqrt{7}}{8}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{2}$$

其中 $x=\frac{2-\sqrt{7}}{2}<2$ ，不合； $x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}\ge2$ ，合所求

綜合 (i) ， (ii) 得三個解，即 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$

立即演練

解下列方程式：

(1) $3x^2-6x+2=0$　　(2)$|x^2-x|=x-\frac{1}{2}$

當 $x=\alpha$ 是某方程式的一個解時，我們也稱 α 是此方程式的一個根。例如 $x=2$ 是方程式 $x^2-x-2=0$ 的一個解，所以 2 是方程式 $x^2-x-2=0$ 的一個根。此方程式可化為 $(x-2)(x+1)=0$ ，所以它有兩個根，即 2 與 -1 。

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0(a\ne0)$ 在 $b^2-4ac\ge0$ 時，有兩個根，即 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 與 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。當 $b^2-4ac=0$ 時，兩根都成了 $\frac{-b}{2a}$ ，所以兩根相等。

當 $b^2-4ac>0$ 時，兩個根 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 與 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 相異。

而當 $b^2-4ac<0$ 時，方程式的兩根仍為 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 與 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，但這裡涉及負數的平方根，只好留待高中再討論。

例題 3

設 k 是一個數，若一元二次方程式 $x^2-(k+3)x+(5-k)=0$ 的兩根相等，則 k 的值為何？又方程式的根為何？

$\boxed{\text{解}}$

兩根相等，故

$\left[-(k+3)\right]^2-4\cdot1\cdot(5-k)=0$，$(k+3)^2-4\,(5-k)=0$

$k^2+10k-11=0$，$(k+11)(k-1)=0$，$k=-11$ 或 $k=1$

(i) 當 $k=-11$ 時，方程式成為 $x^2+8x+16=0$，即 $(x+4)^2=0$，故 $x=-4$

(ii) 當 $k=1$ 時，方程式成為 $x^2-4x+4=0$，即 $(x-2)^2=0$，故 $x=2$

立即演練

設 k 是一個數，若一元二次方程式 $(k-1)x^2+2(k+1)x+9=0$ 的兩根相等，則 k 為何？又方程式的根為何？

設 α，β 是一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的兩根，則

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

故方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的兩根之和為 $-\dfrac{b}{a}$，兩根之積為 $\dfrac{c}{a}$。

例題 4

設 α，β 是方程式 $2x^2-x-4=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$　(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

解

$\alpha+\beta=-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{-4}{2}=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\dfrac{1}{2})^2-2(-2)=\dfrac{1}{4}+4=\dfrac{17}{4}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{17}{4}+2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{25}{4}=\dfrac{25}{8}$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{\frac{17}{4}}{-2}=-\dfrac{17}{8}$

設α，β是方程式$3x^2+6x-5=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　(2) $\alpha^4+\beta^4$

習題 3-1

1．解下列方程式：

(1) $\dfrac{4}{3}x+1=x$

(2) $|2x-5|=3$

(3) $|x-1|+2|x+3|=6$

(4) $3x^2-58x+72=0$

(5) $2x^2-2x-5=0$

(6) $x|x-5|=6$

2．設 $x=-2$ 是方程式 $x^2+kx+(k^2-7)=0$ 的一個解，求 k。

3．設 $k\neq 0$，且二次方程式 $kx^2+(k+1)x+(2k-1)=0$ 的兩根相等，求 k。

4．設 $\alpha\beta$ 是方程式 $2x^2+3x-6=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(4) $\alpha-\beta$

3-2 不等式

二次式 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=\left[x-(-1)\right](x-3)$ ，若以 -1 及 3 爲分界，將所有可能的 x 值分成三段，則在每一段中 $\left[x-(-1)\right](x-3)$ 的正負可以決定如下：

	$x-(-1)=0$	$x-3=0$
		$x-(-1)>0$
	$x-(-1)>0$	$x-3>0$
$x-(-1)<0$	-1　　$x-3<0$	3
$x-3<0$		
$\left[x-(-1)\right](x-3)>0$	$\left[x-(-1)\right](x-3)<0$	$\left[x-(-1)\right](x-3)>0$

總結爲

$-1<x<3$ 時， $(x+1)(x-3)<0$

$x=-1$ 或 $x=3$ 時， $(x+1)(x-3)=0$

$x<-1$ 或 $x>3$ 時， $(x+1)(x-3)>0$

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ ，所以下列各不等式之解，分別是

$x^2-2x-3<0$ 的解爲 $-1<x<3$

$x^2-2x-3\le 0$ 的解爲 $-1\le x\le 3$

$x^2-2x-3>0$ 的解爲 $x<-1$ 或 $x>3$

$x^2-2x-3\ge 0$ 的解爲 $x\le -1$ 或 $x\ge 3$

一般而言，當 $a>0$ 時，若二次式 ax^2+bx+c 可分解爲 $a\ (x-\alpha)(x-\beta)$ 其中 $\alpha<\beta$ ，則

$ax^2+bx+c<0$ 的解爲 $\alpha<\alpha x<\beta$

$ax^2+bx+c\le 0$ 的解爲 $\alpha\le\alpha x\le\beta$

$ax^2+bx+c>0$ 的解爲 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$

$ax^2+bx+c\ge 0$ 的解爲 $x\le\alpha$ 或 $x\ge\beta$

例題 1

解下列不等式：

(1) $2x^2+5x-12\ge 0$　　(2) $-3x^2+5x+2>0$

$\boxed{解}$

(1) $2x^2+5x-12$

$=(2x-3)(x+4)=2(x-\frac{3}{2})(x+4)=2[x-(-4)](x-\frac{3}{2})$

故 $2x^2+5x-12\geq 0$ 的解為 $x\leq -4$ 或 $x\geq \frac{3}{2}$

(2) $-3x^2+5x+2>0$，$(-1)(-3x^2+5x+2)<(-1)\cdot 0$

$3x^2-5x-2<0$，$(3x+1)(x-2)<0$，$-\frac{1}{3}<x<2$

立即演練

解下列不等式：

(1) $3x^2+4x-4<0$　　(2) $-x^2+x+6\leq 0$

二次式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在 $b^2-4ac\geq 0$ 時，可以分解，即

$$ax^2+bx+c=a(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$$

在上式的兩個括號中，x 減去的數就是方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根。注意，當

$b^2-4ac>0$ 時，$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

例題 2

解不等式 $2x^2-5x+1<0$。

解

$2x^2-5x+1<0$，$2(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4})(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4})<0$，$\frac{5-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{5+\sqrt{17}}{4}$

立即演練

解不等式 $-3x^2-2x+2\leq 0$。

當 $b^2-4ac=0$ 時，$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}$，故

$ax^2+bx+c=a(x-\frac{-b}{2a})(x-\frac{-b}{2a})=a(x+\frac{b}{2a})^2$

由於 $(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$，若 $a>0$，則 $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$，且只有在 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，

$ax^2+bx+c=0$，其它情形 $ax^2+bx+c>0$，所以

$ax^2+bx+c<0$ 無解

$ax^2+bx+c \leq 0$ 的解爲 $x=-\frac{b}{2a}$

$ax^2+bx+c>0$ 的解爲 x 是除 $-\frac{b}{2a}$ 之外的任意數

$ax^2+bx+c \geq 0$ 的解爲任意數 x

例題 34

解下列不等式：

(1) $2x^2-8x+8 \leq 0$　　(2) $x^2+6x+9>0$

解

(1) $2x^2-8x+8 \leq 0$， $x^2-4x+4 \leq 0$， $(x-2)^2 \leq 0$， $x=2$

(2) $x^2+6x+9>0$， $(x+3)^2>0$， x 是除了 -3 之外的任意數

立即演練

解下列不等式：

(1) $9x^2-12x+4 \geq 0$　　(2) $-4x^2+8x-4>0$

二次式 $ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ 經由配方，可得

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\,(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$$

當 $a>0$，且判別式 $b^2-4ac<0$ 時， $a\,(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$，且 $\frac{-(b^2-4ac)}{4a}>0$，故

$$ax^2+bx+c=a\,(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-(b^2-4ac)}{4a}>0$$

上式對任意數 x 恆成立。

例題 4

解下列不等式：

(1) $x^2-x+1\geq 0$　　(2) $-2x^2+3x-4>0$

$\boxed{解}$

(1) 判別式 $=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$，故 $x^2-x+1\geq 0$ 恆成立所以 $x^2-x+1\geq 0$ 的解是任意數 x

(2)先將原式化為 $-2x^2-3x+4<0$，再看判別式 $=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 4=9-32=-23<0$ 故 $2x^2-3x+4>0$ 恆成立，所以 $2x^2-3x+4<0$ 無解

即原不等式 $-2x^2+3x-4>0$ 無解

立即演練

解下列不等式：

(1) $3x^2+x+1\leq 0$　　(2) $-x^2-4x-5<0$

習題 3-2

1.解下列不等式：

(1) $-3x+4\geq -2$

(2) $6x^2-x-2<0$

(3) $4x^2-4x+1\leq 0$

(4) $2x^2-5x+6>0$

(5) $x^2-2x-5>0$

(6) $-3x^2+2x-2\geq 0$

2.設 k 是一個數，若二次方程式 $kx^2+(k+3)x-1=0$ 的兩根是相異數，求 k 的範圍。

3.解不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}<0$。