

第一單元 乘法公式與因式分解

1-1 乘法公式

我們知道

$$5 \times (7 + 2) = 5 \times 7 + 5 \times 2$$

一般而言，對任意數 a ， b ， c 恆有

$$a(b + c) = ab + ac$$

同樣的，

$$(b + c)a = ba + ca$$

於是，想計算 $(a + b)(c + d)$ 時，可以先將 $c + d$ 當成一個數，即

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

這個概念可以再推廣，例如

$$(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$$

也就是當兩組數各自相加、括號起來，再相乘時，可以將前面括號中的每一項逐一乘後面括號中的每一項，這些兩兩乘積全部相加即得。這個性質稱為乘法對加法的分配律，簡稱分配律。利用分配律，我們來導出一些乘法公式。

$$(1) (a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{和的立方 } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(2) (a - b)^3 = [a + (-b)]^3$$

$$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{差的立方 } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

例題 1

求 $(2x - 1)^3$ 的展開式。

解

$$(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

立即演練

求 $(5x+2)^3$ 的展開式。

除了上述乘法公式，還可以用分配律導出一些其他的常用公式：

$$(3) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(4) (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

例題 2

將 $(x-3)(x^2+3x+9)$ 乘開並化簡。

解

$$(x-3)(x^2+3x+9) = (x-3)(x^2+3\cdot x+3^2) = x^3 - 3^3 = x^3 - 27$$

立即演練

將 $(3x+2)(9x^2-6x+4)$ 乘開並化簡。

前面已利用分配律導出一些乘法公式，但分配律才是乘法運算中最基本的性質。在例 2 及其後的立即演練中，不套用乘法公式，直接用分配律乘開，也能得出結果。

例題 3

將 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 乘開並化簡。

解

使用分配律乘開：

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c \\ & \quad - abc + a^2c + b^2c + c^3 - abc - bc^2 - ac^2 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

例 3 的結果也可以作為一個公式，即

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

習題 1-1

1. 計算 $(29.5)^2=(30-0.5)^2=?$
2. 求 $(x-\frac{1}{3})^3$ 的展開式。
3. 將下列各式乘開並化簡：
 - (1) $(x+2)(x^2-2x+4)$
 - (2) $(x+2)(x^2+2x+4)$
4. 乘開並化簡 $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 。
5. 試證： $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 。

1-2 因式分解

數學中的等式都是左右對等，當 $A = B$ 時， $B = A$ 也對。
所以，既然有

$$a(b + c) = ab + ac$$

也就有

$$ab + ac = a(b + c)$$

前者是用分配律乘開，後者則提出公因式。又如

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (a + b)(c + d) \end{aligned}$$

例題 1

求 $2xy - 5x + 6y - 15$ 因式分解。

解

$$2xy - 5x + 6y - 15 = x(2y - 5) + 3(2y - 5) = (x + 3)(2y - 5)$$

立即演練

試將 $6xy - 4x - 3y + 2$ 因式分解。

1-1 節中提到的乘法公式，反向使用就是因式分解的公式。例如：

和的平方 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

差的平方 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

和的立方 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

差的立方 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

平方差 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

立方和 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

立方差 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

例題 2

將 $x^3 - 8$ 因式分解。

解

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

立即演練

試將 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ 因式分解。

例題 3

將 $x^4 + x^2 + 1$ 因式分解。

解

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

立即演練

試將 $x^4 + 2x^2 + 9$ 因式分解。

$a^3 + b^3$ 與 $(a+b)^3$ 是不同的意思。事實上

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

所以

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$

例題 4

因式分解 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。

解

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

例 4 中的結果，請與 1-1 節中的例 3 對照。

立即演練

試將 $x^3 - 3xy + y^3 + 1$ 因式分解。

習題 1-2

1. 將下列各式作因式分解：

(1) $2xy + 6x - y - 3$

(2) $x^3 + \frac{1}{64}$

(3) $x^4 - 6x^2 + 8$

(4) $x^2 + 2x - 4$

(5) $3x^2 - 6x + 2$

(6) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

(7) $(x^2 - x - 4)(x^2 - x + 1) + 6$

$$(8) (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 2) + 5x^2$$

2. (1) 試證明 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \circ$$

(2) 設 a, b, c 都是正數，試證明 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ 。