林柏佐

圓與球面

圓的方程式

我們利用 2 點的距離公式，以及圓的定義，我們就可以求得圓的方程式。考慮平面上一定點 $O(x_0, y_0)$, 則離此定點長度為 r 的動點軌跡 $P(x, y)$ 滿足 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$, 接著 2 邊平方，便得到我們的標準式。因此我們要求得一個圓的方程式中，只要知道圓心與半徑 2 個資料即可。

1. 標準式

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, 其中 $O(x_0, y_0)$ 我們稱為圓心，r 稱為半徑。

如果我們將標準式利用乘法公式展開，我們會發現它的"一般"長相。

2. 一般式

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$. 如果我們是得到這樣的式子，我們反過來將其配方，我們便可以得到它的圓心與半徑，當然我們可以每次都用配方法將其求出，但為了節省時間，我們先將其結果列出來，提供同學記憶。

$$\Rightarrow (x+\frac{d}{2})^2+(y+\frac{e}{2})^2=(\frac{d}{2})^2+(\frac{e}{2})^2-f=(\sqrt{(\frac{d}{2})^2+(\frac{e}{2})^2-f})^2$$

我們觀察一下等式的右邊，如果隨便給一個一般式，我們能保證右邊一定是"正數"嗎($\because r$ 必須大於 0)？恐怕不一定吧！因此右邊這個式子，在判斷是不是一個圓是很重要的，因此我們稱右邊的式子為圓的判別式，為了方便起見，我們用 Δ 表示，也就是說 $\Delta=(\frac{d}{2})^2+(\frac{e}{2})^2-f$ (口訣：一半的平方，一半的平方減去常數項)，就類似我們以前學一元二次實係數方程式中，判別式用來判斷有沒有實根一樣重要，因此要掌握一個方程式是否為圓，就看其判別式即可，底下我們列出結果。

Corollary. ⓐ當 $\Delta>0 \Leftrightarrow$ 為一個圓，$O(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$ (一半的變號，一半的變號)，$r=\sqrt{\Delta}$

ⓑ當 $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 為一點 $O(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$

ⓒ當 $\Delta<0 \Leftrightarrow$ 無圖形 $\varnothing$

Example1.

(1) 求圓 $2x^2+2y^2+8x-y+1=0$ 的圓心，半徑。

(2) 若方程式 $x^2+y^2-2kx+4y+2k+7=0$ 的圖形為第三象限的一個點，求此點坐標。

Solution.

(1) $x^2+y^2+4x-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}=0$ $\therefore$ 圓心為 $(-2,\frac{1}{4})$

$$r=\sqrt{2^2+(\frac{1}{4})^2-\frac{1}{2}}=\sqrt{4+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{64+1-32}{16}}=\frac{\sqrt{57}}{4}.$$

(2) $\because$ 圖形為一個點 $\Rightarrow \Delta=k^2+2^2-(2k+7)=0$

$$\therefore k^2-2k-3=0$$

$$\therefore k=3\vee -1$$

但因為此點在第三象限

$\therefore k=-1,$ 此點為 $(-1,-2).$

Note. 從此題的解題過程，我們會發現不能直接代口訣，而是要把 x^2, y^2 的係數變成 1，才能套用，不然一定會發生錯誤，因為一般來說，並沒有規定 x^2, y^2 的係數必須為 1，因此拿到題目時一定要特別小心，需先把係數調整才形，這在之後很多情形也是如此情形。

在國中時，我們在圓周角時學到一個很重要的性質，那就是半圓所對的圓周角為直角，底下我們就要利用此事實來推導圓的另一種表達式。

3. 直徑式

直徑式口訣：
x 用完，再用 y.

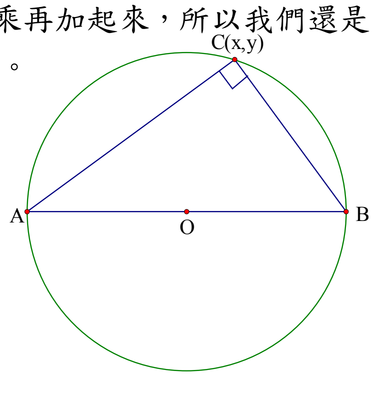
設 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2),$ 以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式：$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$ 一開始同學在學直徑式時，很容易背錯，不知道哪 2 個括號要先乘再加起來，所以我們還是列出記憶口訣在右上方，以方便同學記憶，避免搞混。

Proof. 在圓上任取一點 $C(x,y),$

$$\because \overline{AB} \text{ 為直徑} \Rightarrow \overline{AC}\perp\overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{BC}=0$$

$$\Rightarrow (x-x_1,y-y_1)\cdot(x-x_2,y-y_2)=0$$

$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

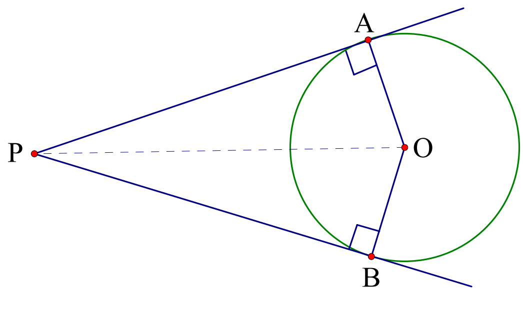


Example2.

自 $P(1,2)$ 作圓 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$ 兩切線切點為 $A,B,$ 求 ΔPAB 的外接圓方程式。

Solution.

我們知道切線有個特性，就是它會與切點所連的半徑互相垂直，由圖知



$\angle PAO+\angle PBO=180^0$(對角互補)$\Rightarrow P,A,O,B$ 四點共圓

$\therefore \Delta PAB$ 的外接圓相當於以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓

$\Rightarrow (x-1)(x+2)+(y-2)(y-1)=0.$

圓從外形來看，它有 2 個變數，我們是不是可以像直線一樣，去找它的參數式，讓它變成只有一個變數(參數)，在作棟點軌跡時會比較方便處理呢？答案是肯定的，因為它與直線一樣，都是相當於一條圓周而已，所以我們要辦法把它參數化，那我們要如何找它的參數式呢？底下我們就來回答這個問題。

4. 參數式

(1) 如果圓的 eq: $x^2+y^2=r^2$, 則圓上任一點可假設 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta<2\pi.$

這裡我們可以發現其實它的參數式，就是三角函數的定義結合而已。不過如果只是但純要找參數的記憶法可以採用以下的形式(這在將來橢圓也可以用)，原式：$(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1 \because$ 我們知道 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\Rightarrow$ 令 $\frac{x}{r}=\cos\theta, \frac{y}{r}=\sin\theta$ 在將 r 呈過來即可。

(2) 如果圓的 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, 圓上任一點可假設 $\begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta<2\pi.$

同樣地，我們可以從他的幾何意義下手，發現它只是從原點平移的過程而已，也可以利用原式：$(\frac{x-h}{r})^2+(\frac{y-k}{r})^2=1 \therefore$ 令 $\frac{x-h}{r}=\cos\theta, \frac{y-k}{r}=\sin\theta$ 即可。

Example3.

(1) 設 $x,y\in\mathbb{R}$, 滿足 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ 的關係式，求 $3x-4y$ 的最大值與最小值。

(2) $A(1,2), B(-3,0)$, 若 $P(x,y)$ 是以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓上移動，則 $2x+y-1$ 的最大值？

Solution.

(1) 看到求最大值與最小值，我們通常對於 2 個變數以上便會很頭痛，如果我們能化簡成 1 個變數，處理起來就會方便很多，因此我們自然就會想利用圓的參數式來幫我們解這個題目。我們令圓的參數式：$\begin{cases} x=2+\sqrt{5}\cos\theta \\ y=-1+\sqrt{5}\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta<2\pi$

$3x-4y=3\sqrt{5}\cos\theta-4\sqrt{5}\sin\theta+10$, 由以前我們學過三角函數的疊合，便可以求出最大值與最小值，$\therefore$ 最大值為 $\sqrt{45+80}+10=5\sqrt{5}+10$, 最小值為

$10-\sqrt{45+80}=10-5\sqrt{5}.$

(2) 由直徑式：$P(x,y)$ 滿足 $(x-1)(x+3)+(y-2)y=0$

$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

$$\begin{cases} x=-1+\sqrt{5}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{5}\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta<2\pi$$

$\therefore 2x+y-1=2\sqrt{5}\cos\theta+\sqrt{5}\sin\theta-2$

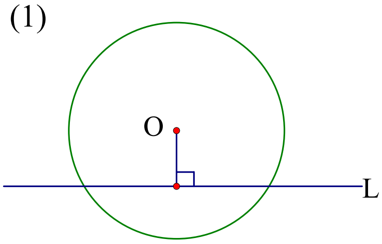
最大值為 $\sqrt{20+5}-2=5-2=3.$

Note. 稍微複習一下，當 $0\le\theta<2\pi$ 時 $\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos\theta+b\sin\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$, 要注意是小於以 a,b 為 2 股的斜邊，而非 $|a|+|b|$, 這點一定要記住，如果忘記的同學，請回去複習高一下三角函數的疊合，這裡不深入探討。

圓與直線的關係

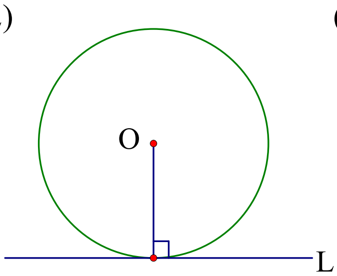
在國中時，我們已經有探討過圓與直線的關係。現在我們引進圓的方程式，一樣利用這些判斷性質，來探討圓與直線的關係。

(1)



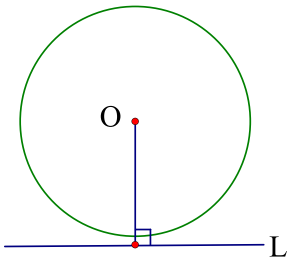
$d(O,L)<r$, 相割.

(2)



$d(O,L)=r$, 相切

(3)



$d(O,L)>r$, 相離

Note. (1) L 與圓相交(包含相割與相切這2種情形) $\Leftrightarrow d(O,L)\le r$

(2) L 與圓不相交 $\Leftrightarrow d(O,L)>r$

在找圓與直線的關係，盡量利用距離的關係會比用判別是容易的多($\because$點到直線有距離公式)，因此看到直線與圓，就利用距離去判斷。

Example4.

在坐標平面上，一圓通過點 $(-2,7)$，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6)$，若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，則 $a=$_______，$b=$_______，$c=$_____。

Solution.

令 $A(-2,7),B(-1,6)$

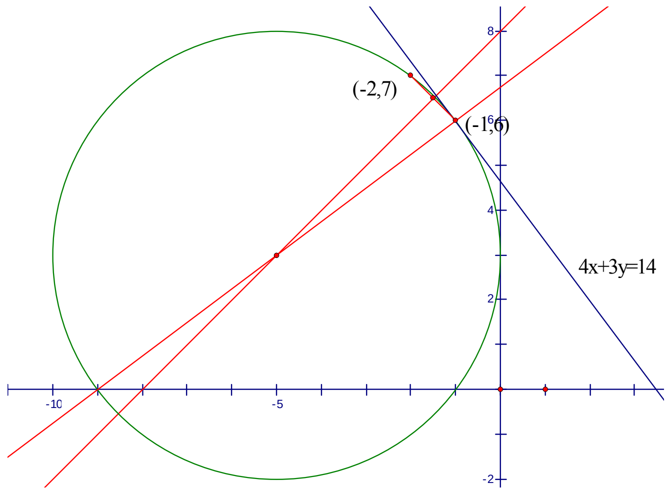
通過點B與 $4x+3y=14$ 垂直的直線：$3x-4y+27=0$

$\overline{AB}$ 的中點 $(\frac{-3}{2},\frac{13}{2})$，$\overline{AB}=(1,-1)$ $\therefore \overline{AB}$ 的中垂線：$x-y+8=0$

$\therefore \begin{cases} 3x-4y+27=0 \\ x-y+8=0 \end{cases} \Rightarrow$ 圓心 $(-5,3)$，半徑 $=\sqrt{(-2+5)^2+(7-3)^2}=5$

$\therefore$ 圓的方程式：$(x+5)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2+10x-6y+9=0$

$\therefore a=10, b=-6, c=9$

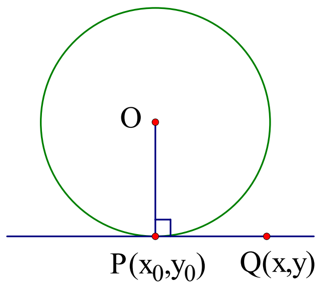


我們討論完直線與圓的關係，那我們下一個就會關心，如果給定特定的點，我們要如何找到切線方程式呢？

切線

A.過圓上一點之切線

Property. 若圓 $C: x^2+y^2+dx+ey+f=0, P(x_0,y_0)$ 為圓上任意一點，則過 P 之切線方程式為 $x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0.$



Proof. 圓心 $O(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$ $\because P$ 在圓上，

故滿足 $x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f=0 \cdots ①$

令切線上任一點 $Q(x,y)$,

$\because \overline{OP} \perp \overline{PQ}$

$\Rightarrow \overline{OP}\cdot\overline{PQ}=0 \Rightarrow (x_0+\frac{d}{2}, y_0+\frac{e}{2})\cdot(x-x_0, y-y_0)=0$

$(x_0+\frac{d}{2})(x-x_0)+(y_0+\frac{e}{2})(y-y_0)=0$

$$x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)-({x_0}^2+{y_0}^2+dx_0+ey_0)=0$$

$$x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x+x_0)+\frac{e}{2}(y+y_0)+f=0$$(由①移項而得)

Note. 有些書本所列的切點公式可能略有不同，但是以下提供一種方法是可以適用在以後我們所學二次曲線(甚至是空間中二次曲面)皆可以記憶的方法，那便是你只要將每一項拆成2個部分，1個保留，1個給切點就可以做出來，底下我們把它給列出來，提供同學參考。$x^2=x\cdot x\to x_0x, y^2=y\cdot y\to y_0y, x=\frac{x+x}{2}\to\frac{x+x_0}{2}$,

$y=\frac{y+y}{2}\to\frac{y+y_0}{2}, f\to f.$

Example5.

若 $C: x^2+y^2+2x+y-9=0, P(1,2),$ 則過 P 之切線方程式。

Solution.

$\because P$ 代入圓 C (合) $\Rightarrow$ 代切點公式

$\Rightarrow 1\cdot x+2y+x+1+\frac{y+2}{2}-9=0$

$\therefore 2x+4y+2x+2+y+2-18=0$

$\therefore 4x+5y-14=0.$

Note. 第一步代入檢驗是很重要的一步，許多剛學到這裡的同學，常常會忽略掉這件事，便開始直接代切點公式，這一點請特別小心。

B.過以知圓外一點 (x_0,y_0) 之切線問題

其實這個問題我們如果能夠令出直線的方程式，就可以迎刃而解，在高一中我們學過點斜式，我們就利用點斜式把直線給假設出來，在把斜率給解出來即可。

【方法】(1)令切線eq: $y-y_0=m(x-x_0)$ (2)利用 $d(O,L)=r$, 求 m

Corollary. 過圓外一點切線必有2條 $\therefore m$ 應2個解

若 m 只能求出一解的話，則另一條直線必與 x 軸垂直(即 m 不存在)

($\because$ 點斜式不能表示出過某一定點所有直線，其缺憾就是當直線斜率不存在時，無法表示，因此缺漏的那條便是鉛垂線)

Example6.

若圓 $C: x^2+y^2-2x-4y-4=0, P(4,6),$ 則過 P 且與圓相切之切線方程式。

Solution.

$\because P$ 代入圓 $C: 16+36-8-24-4=16>0\Rightarrow P$ 在圓外

設過 P 之直線 $L: y-6=m(x-4)$

$mx-y-4m+6=0$

令圓心 $O(1,2)$, 半徑 $r=\sqrt{1+4+4}=3$

$\because d(O,L)=r$

$\dfrac{|m-2-4m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=3\Rightarrow |-3m+4|=3\sqrt{m^2+1}$

$9m^2-24m+16=9m^2+9$

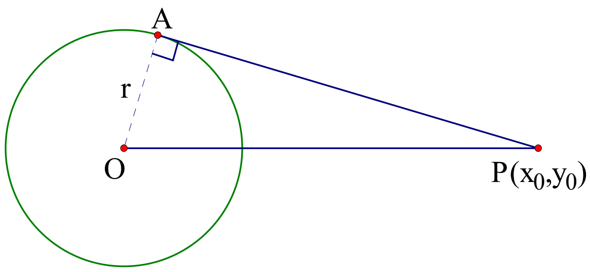
$24m=7\therefore m=\dfrac{7}{24}$

$7x-24y+116=0\vee x=4$

Note. 要判斷一點與圓的關係，可以利用點與圓心的距離跟 r 做比較，也可以像這裡一樣，我們代入方程式檢驗，我們把這個簡單的結果列出來(不證明，有興趣的同學可自行驗證)。如果圓的方程式 $C=0$, 有一點 P, 且 x^2,y^2 的係數大於 0。如果 $C(P)>0$, 則 P 在圓外；反之 $C(P)<0$, 則 P 在圓內。

研究完切線方程式，我們很自然的就會想了解切線段的長。

切線段長



Theorem. $P(x_0,y_0)$ 為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外一點，則切線長 $\overline{PA}=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f}$.

Proof. 圓心 $O(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2})$, 半徑 $r=\sqrt{(\dfrac{d}{2})^2+(\dfrac{e}{2})^2-f}$

$\overline{PA}^2=\overline{OP}^2-r^2=(x_0+\dfrac{d}{2})^2+(y_0+\dfrac{e}{2})^2-[(\dfrac{d}{2})^2+(\dfrac{e}{2})^2-f]=x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f$,

$\therefore \overline{PA}=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f}$.

Corollary. 這邊我們再次提醒，代切線長公式時，需要注意：x^2,y^2 的係數必須是“1”。

Example7.
圓 $C:2x^2+2y^2-4x+6y-3=0$, 圓外有一點 $P(-1,2)$, 求

(1)過 P 的切線長 (2)過 P 作一割線交圓於 B,C, 則 $\overline{PB}\cdot\overline{PC}$

(3)過 P 作圓 C 的切線，切點為 Q,R, 求過 P,Q,R 三點之圓的方程式。

Solution.

$C: x^2+y^2-2x+3y-\frac{3}{2}=0$

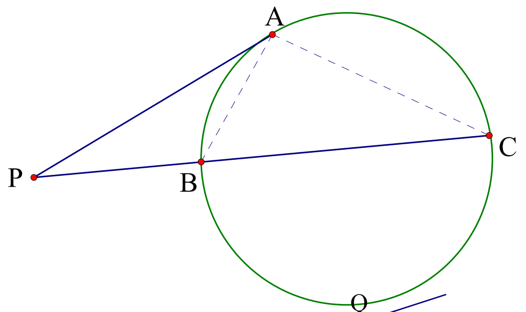
圓心 $O(1,-\frac{3}{2})$

(1)所求 $=\sqrt{1+4+2+6-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{23}{2}}=\frac{\sqrt{46}}{2}.$

(2)由圓冪定理知：

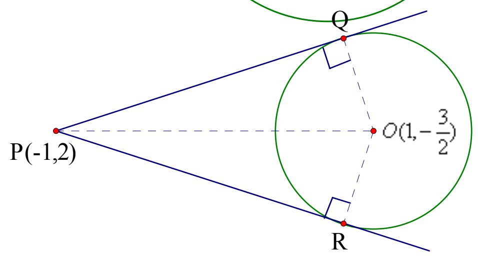
我們利用弦切角與圓周角在加上相似形對應邊成比例的性質，便可以得到

$\overline{PB}\cdot\overline{PC}=\overline{PA}^2=\frac{23}{2}.$



(3) 與前面直徑式的Example同樣的想法，即以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓

$(x+1)(x-1)+(y-2)(y+\frac{3}{2})=0.$



兩圓中，有一種是交於2點，我們會有興趣它交點所在的直線方程式，以及此線有沒有什麼幾何意義呢？

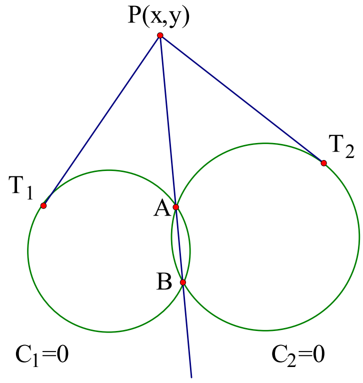
根軸

Definition. $C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0,$ 到2圓 C_1, C_2 切線段等長所有點的軌跡，所在的直線稱為根軸，且根軸方程式為 $(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0.$

Proof. 令軌跡 $P(x,y),$ 由切線段長公式，

$\therefore \sqrt{x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1}=\sqrt{x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2}$

$\Rightarrow (d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0.$



Corollary. 如右圖，如果2圓交於 A,B 2點，那麼這2點必在根軸上，$\because$ 此2點接滿足 $C_1=0$ 且 $C_2=0,$ 當然也會滿足 $C_1-C_2=0$ 這個方程式(當然還是要注意，x^2, y^2 的係數必須是“1”才能相減，不然不會是直線，也就是說想辦法消去平方項即可，這在之後圓錐曲線也是同樣的方法找根軸)。

$\boxed{\text{根軸：} C_1-C_2=0}$

最後我們來看幾何意義，我們利用2次圓冪定理可得：$\overline{PT_1}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT_2}^2,$ 這

也是為什麼此線上的點到2圓的切線會等距離的原因。

如果同學對圓的觀念很清楚的話，接下來我們學要看看立體中的“球”，很多只是圓的推廣，所以在學習上就會是輕而易舉的事。

球面方程式

Definition. 空間中與一定點等距離所有點所形成的軌跡我們稱之為球。

1.標準式

以 $O(x_0,y_0,z_0)$ 為球心，r 為半徑之方程式為 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$

2.一般式

在平面中我們知道不共線的3點恰可決定唯一1圓。而在空間中，不共面的4點恰可決定唯一1球，我們只要仿照圓的一般式假設球面方程式：
$x^2+y^2+dx+ey+fz+g=0,$ 將此4點代入，即可解得 $d,e,f,g,$ 便可清楚知道球面的方程式為何。相同的，球的球心 $O(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2},-\frac{f}{2}),\Delta=(\frac{d}{2})^2+(\frac{e}{2})^2+(\frac{f}{2})^2-g.$ (跟原只有差在多一個 $z,$ 記憶的方法皆相同)。

Corollary. ⓐ當 $\Delta>0\Leftrightarrow$ 為一個球，$O(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2},-\frac{f}{2}),r=\sqrt{\Delta}$

ⓑ當 $\Delta=0\Leftrightarrow$ 為一點 $O(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2},-\frac{f}{2})$

ⓒ當 $\Delta<0\Leftrightarrow$ 無圖形 $\varnothing$

3.直徑式

以 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ 為直徑端點的球面方程式：
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$ (推導與圓同)，也可以從證明中知道空間中道兩定點所形成向量互相垂直的點的軌跡形成一個球。

Example8.
空間中有 2 點 $P(10,2,5),Q(-6,10,11)$

(1)以 $\overline{PQ}$ 為直徑的球面方程式 (2)此球與 xy 平面之交圓面積

(3)此球在 z 軸上截出之線段長
Solution.

(1)由直徑式得：$(x-10)(x+6)+(y-2)(y-10)+(z-5)(z-11)=0$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0.$$

(2)令 $z=0$ 代入

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-12y+15=0$

$\Rightarrow r=\sqrt{4+36-15}=5$

$\therefore$ 圓面積 $=5^2\pi=25\pi$

(3)令 $x=0, y=0$ 代入

$\Rightarrow z^2-16z+15=0 \therefore z=1\vee 15$

$\therefore$ 截線段長 $=15-1=14$

Note. 在一般的平面或直線截過去時，如果我們要求它交圓的半徑或交線段的長度並不能直接將平面或直線的方程式，只有在坐標平面或是坐標軸(抑或是跟其平行)的情形下才可以直接代入，否則我們要用一般式去刻畫空間的圓是一件很難的事，通常我們可以改採參數式，但這部分已超過高中的範圍，在此我們不深入探討。但是我們還是可以利用球的幾何性質來求得我們想要的結果，但總結一句話，就是不要歲便將方程式代入，否則可能會做出不可能的答案。

切平面

在平面中，我們很自然的會考慮圓上的切線與圓外的切線。那相對於空間中，我們就會考慮切平面；一樣的，球上一點的切平面只有唯一一個，在空間中一樣有切點公式，所以可以輕鬆求出切平面，如果我們考慮球外一點呢？我們會發現有無限多個切平面與球相切，這樣子討論是無意義的，所以我們不可能只考慮 1 個點；那如果是通過 2 個點呢，我們知道如果一個平面通過 2 個點它就會通過它們 2 點所決定的直線，也就是說直線上的每一個點都在這個平面上。但是問題於焉產生，第一個是是否像平面一樣有 2 個呢，直觀上從圖形上是有 2 個切平面，這個好解決。另一個問題是，在空間中通過一條直線的平面我們要如何假設呢？這時候就要去回想我們在之前常常使用的“平面族”，它是個非常好假設的工具，除了可以假設平面外，還可以讓平面的旋轉僅由一個變數控制，這樣子便解決我們的問題了，接著我們利用代數的手法，來確定平面只有唯一的一個即可，底下我們就來看例子。

Example9.

(1)過 $P(4,1,5)$ 與球 $x^2+y^2+z^2-2y-4z-20=0$ 相切的平面方程式

(2)過 $A(4,2,3), B(2,2,1)$ 兩點且和球 $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$ 相切的平面方程式。

Solution.

(1)$\because P$ 代入球面方程式合 $\Rightarrow P$ 點在球面上

代切點公式：

$4x+y+8z-(y+1)-2(z+5)-20=0$

$\therefore 4x+3z=31$

(2)① $\overline{AB}=(-2,0,-2)=-2(1,0,1)$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB}:\begin{cases} x=4+t \\ y=2 \\ z=3+t \end{cases},t\in\mathbb{R},\overleftrightarrow{AB}:\begin{cases} x-z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

②$\because$ 我們令包含 $\overleftrightarrow{AB}$ 的平面方程式：$x-z-1+k(y-2)=0$

$x+ky-z-1-2k=0$

球心 $O(1,0,2)$, 半徑 $r=\sqrt{1+0+1+1}=\sqrt{3}$

$$\because \text{相切} \Rightarrow d(O,E)=r \Rightarrow \frac{|1-1-1-2k|}{\sqrt{1+k^2+1}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (2k+1)^2=3(2+k^2)$$

$$\Rightarrow k^2+4k-5=0 \Rightarrow k=-5\vee 1$$

切平面：$x-5y-z+9=0\vee x+y-z=3$

所以我們的確從代數的計算發現它確實會有 2 個切平面。

切點求法

在圓中我們知道切線會與切點所連的半徑垂直，空間中的平面也會與切點所連的半徑垂直，因此如果我們要求切點的話，只要考慮球心對切平面的投影點即可，也就是去找投影點。

Example10.

$S:(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4,E:2x-y-2z+k=0,$ 且 $|k|\le 10$

(1)若 E 與 S 相切，求 k. (2)承(1)求切點坐標。

Solution.

(1)球心 $O(1,0,-3)$, 半徑 $r=2$ 相切 $\Rightarrow d(O,E)=r$

$$\Rightarrow \frac{|2+6+k|}{\sqrt{4+1+4}}=2 \Rightarrow |k+8|=6$$

$\therefore k=-2\vee -14 \because |k|\le 10 \Rightarrow k=-2.$

(2)切點即球心O對切平面E之投影點H

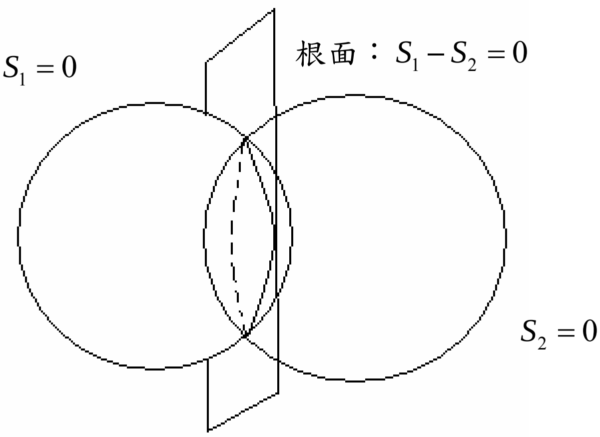
$$\therefore \overleftrightarrow{OH}:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-3-2t \end{cases}$$

代入 $E:2(1+2t)+t+2(3+2t)-2=0\Rightarrow 9t+6=0$

$\therefore t=-\frac{2}{3}\Rightarrow H(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{5}{3})$

球面族

我們知道2個圓相交是2個點，那麼2個球相交呢？答案是一個圓。那麼如果我們現在要求一個球面，必須要過2個固定球共同的部分(即交圓)，那我們要怎麼假設此球的方程式呢？與平面族類似，如果2球面方程式$S_1=0,S_2=0,$ 則過其交圓球的方程式S可假設為$S:S_1+kS_2=0,$ 如果給的是一球$S=0,$ 與一平面$E=0,$ 則我們假設$S+kE=0.$ 特別當S_1,S_2,x^2,y^2的係數相等，則$S_1-S_2=0$為一個平面，也就是此交圓所在的平面，跟平面上圓一樣，我們把這個平面稱為根面，如下圖所示。



Example11.

求過球面$S:x^2+y^2+z^2=9$與平面$E:x+2y-2z=3$之交集

(1)過點$(1,1,1)$之球面方程式。 (2)球心在平面E上之球面方程式。

Solution.

(1)由球面族：此球面可假設為$S+kE=0$

$x^2+y^2+z^2-9+k(x+2y-2z-3)=0$

代入$(1,1,1)\Rightarrow -6-2k=0\Rightarrow k=-3$

所求球面方程式：$x^2+y^2+z^2-3x-6y+6z=0.$

(2)與前概念同假設球面：$x^2+y^2+z^2-9+k(x+2y-2z-3)=0$

$\Rightarrow$ 球心 $O(-\frac{k}{2},-k,k)$ 代入 $E:-\frac{k}{2}-2k-2k=3$

$\therefore k=-\frac{2}{3}$

所求球面方程式：$x^2+y^2+z^2-9+-\frac{2}{3}(x+2y-2z-3)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}z-7=0.$

我們與平面上圓類似，討論完球的一些基本性質，接著我們就會討論球與平面的關係，與圓一樣是利用半徑去討論，唯一的差異是，如果是相交的話，平面會對球截出一個圓，底下就是整理的結果。

球面與平面的關係

設 S 為一球面，O 為球心，r 為半徑，E 為平面

①若 $d(O,E)>r$, 則 S 與 E 相離

②若 $d(O,E)=r$, 則 S 與 E 相切

③若 $d(O,E)<r$, 則 S 與 E 相交，交集為一圓

④大圓：過球心的平面所截之圓面積最大，稱為大圓(即所截圓半徑等於球半徑)

小圓：不過球心的平面所截之圓，稱為小圓

Example12.

(1) 球 $S:x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-16=0$ 被平面 $3x-4y-12z-17=0$ 截出一圓，求此圓之圓心、半徑。

(2) 承(1)，若 yz 平面截球 S 於一圓，求此圓之圓心，圓面積。

Solution.

(1)假設圓心 $H(-1+3t,2-4t,2-12t),t\in\mathbb{R}$

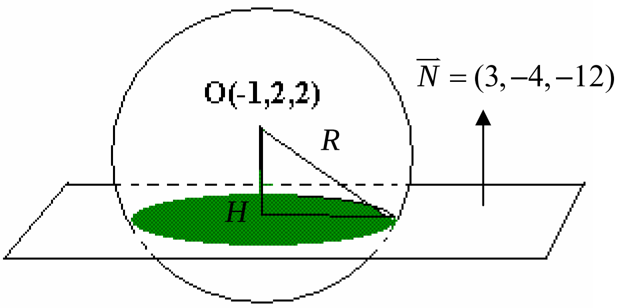
代入平面：

$3(-1+3t)-4(2-4t)+12(2-12t)-17=0$

$169t-52=0 \therefore t=\frac{4}{13}$

圓心 $H(-\frac{1}{13},\frac{10}{13},-\frac{22}{13}).$

球心 $R=\sqrt{1+4+4+16}=5$



Note. 圓心 $H:O$ 對 E 之投影點

$$\overline{OH}=d(O,E)=\frac{|-3-8-24-17|}{13}=4$$

$\therefore$ 圓半徑 $r=\sqrt{25-16}=3.$

(2) $x=0$ 代入，$y^2+z^2-4y-4z-16=0,$

圓心 $(0,2,2), r=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24},$

圓面積 $=24\pi.$

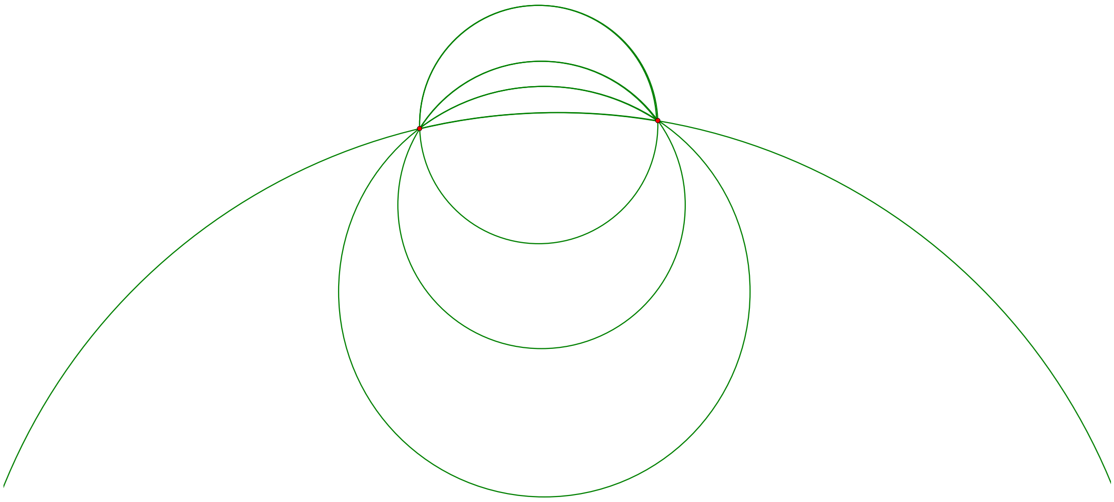
從上面這個例子我們便可以比較，如果截面不是坐標平面，那要處理起來便會複雜許多，但是如果是坐標平面，我們只要代入，便回到平面上圓的形式，接著用我們熟悉的圓的性質就可以輕鬆得到它重要的資訊。

地球上兩點的距離

我們是住在地球上面，如果不嚴謹的要求，地球可視作為一個圓，也就是說我們所處的地球我們看作是平的，事實上有一個弧度在。那我們知道在空間中最短的距離是直線，而且從此便可以延伸出三角不等式(2 邊之和大於第 3 邊)；那活在球面上的我們，自然會有興趣考慮，如果只能在球面上運動，那最短的距離是什麼呢？底下我們把討論此重要的結果。

Definition. 球面上 A,B 2 點的球面距離，以球心 O 與 A,B 所決定的平面截球於大圓上劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧長。

Remark. 事實上我們在定義距離時，都是依照最短距離去定的，就會有同學去想說，為什麼大圓便是最短距離呢？要嚴格證明並解釋它是很困難的，這就像是為什麼空間中 2 點最短的距離是直線一樣，事實上這便不是 axiom, 我們的確可以證明這件事實，但是這是大學裡 differential geometry 中的 geodesic，屬於比較進階幾何學的知識，建議有興趣的同學，可在大學修這一門課去了解原因。不過現在提供一個較為直觀的解釋方法，請看下圖

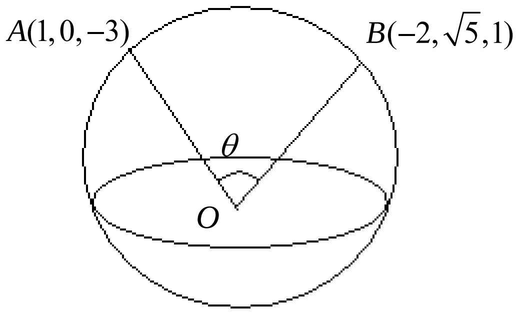


我們從上圖會發現，通過固定 2 點的圓，當圓越大時，它的弧長會接近直線，所以我們就可以很直觀的感覺到圓越大其弧長越短這個事實，那我們又知道地球中最大的圓為大圓，所以我們可以推論大圓是最短路徑。這也是為什麼我們會通常把我們生活的陸地視為平面，因為相對於地球的半徑來講，我們生活的空間實在是很小，所以基本上我們可以假設我們生活的地區為一個平面便也是這樣來的。

Example13.

在空間中，球面 $x^2+y^2+z^2=10$ 上兩點 $A(1,0,-3), B(-2,\sqrt{5},1)$, 一隻烏龜沿球面從 A 爬到 B 的最短距離。

Solution.



$\overline{OA}=(1,0,-3), \overline{OB}=(-2,\sqrt{5},1)$

$$\cos\theta=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{OB}\right|}=\frac{-2+0-3}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\frac{2\pi}{3}$, 故最短距離 $=\widehat{AB}=r\theta$

$$=\sqrt{10}\,\frac{2\pi}{3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\pi.$$