

數學期望值與二項分配

數學期望值與標準差

我們在高二下的時候，已經介紹過數學期望值(機率)、平均數與標準差(統計)。首先我們先來分辨期望值與平均數的差別，不過當時我們並沒有刻意談到這兩個概念的分別，平常我們在日常生活中也常常誤用，因此請同學特別留意。正確的說法是機率上才有期望值，它的定義就如高二我們碰到的一樣。如果一個試驗所有可能值(可想成報酬)為 $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，且個別發生的機率為 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，

則 $\sum_{i=1}^n m_i p_i$ 為其期望值。但是如果今天你已經得到很多統計資料的結果

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ，那我們就把這些結果平均起來，因此我們定義母體平均數為

$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ 。那兩者的差異在哪？當我們還沒進行試驗前，我們會去算期望值(預期的報酬)，但是得到資料的結果，我們會去算平均值。再加上我們期望值的意義，是說明在經過很多的試驗，平均下來的報酬。也就是我們利用平均數去解釋期望值的意義，所以這兩個概念更容易混亂，不過我們也可以從平均數回頭來看期望值的概念。

在以前我們會算加權平均數，跟上面情形一樣，如果考慮有 $m_1, m_2, \dots, m_k$ ， k 個值，該組資料所佔的比例為 $p_1, p_2, \dots, p_k$ ，則平均數 $\mu = \sum_{i=1}^k m_i p_i$ ，這也就很像我們所看到的平均數的定義，如果我們將其比例想為其發生的機率(即古典機率的假設)，那我們的確可以將其想為期望值。

事實上在機率理論中，也有(機率)標準差(但與統計標準差為同一個詞，更容易搞混)的定義，我們可以仿照上面的想法，考慮母體標準差 σ 也可以寫成

事實上在機率理論中，也有(機率)標準差(但與統計標準差為同一個詞，更容易搞混)的定義，我們可以仿照上面的想法，考慮母體標準差 σ 也可以寫成

$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k (m_i - \mu)^2 p_i}$ ，其中 μ 是期望值(不是平均數)，因此我們就定定義(數學)標

準差 $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k (m_i - \mu)^2 p_i}$ 。

Note. 這裡(機率)變異數與(數學)變異數是一樣的。但往後請同學在做題目時自行判斷是(數學)標準差還是我們以前講的(統計)標準差。還有我們機率與統計中慣用的符號也是一樣的(因此更難分別)。

底下我們就利用數學期望值與標準差的定義，來看看如何計算吧！

Example 1.

擲一公正骰子，若出現點數為 k ，則可得 $2k$ 元，試求做此試驗所得錢數的期望值與標準差。

Solution.

$$\begin{aligned}\text{所得錢數的期望值 } \mu &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = \frac{42}{6} = 7.\end{aligned}$$

所得錢數的(數學)變異數

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{6}(2-7)^2 + \frac{1}{6}(4-7)^2 + \frac{1}{6}(6-7)^2 + \frac{1}{6}(8-7)^2 + \frac{1}{6}(10-7)^2 + \frac{1}{6}(12-7)^2 \\ &= \frac{25+9+1+1+9+25}{6} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3}\end{aligned}$$

$$\text{故所得錢數的標準差為 } \sigma = \sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}.$$

二項分配

假設有一個試驗，結果可以只歸納出 2 種，成功或失敗。這個我們便稱為白努力試驗 (紀念 Swiss 數學家 James Bernoulli)。當然啦！我們可以討論一個試驗，更可以討論 n 個重複試驗的情況，如果每一次成功的機率皆為 p ，失敗的機率皆為 $1-p$ 。且它們每次都不互相影響，這樣的試驗我們稱為二項試驗。

因此，二項試驗具有下列的特徵：

- ① 共進行 n 次的試驗。
- ② 每次試驗都互不影響。(即完全獨立)
- ③ 每一次試驗成功的機率是相同的。

我們將二項試驗成功次數的機率分布情形稱為二項分配。例如，擲一枚均勻的硬幣三次，每次所得的結果不是正面(成功)，就是反面(失敗)，此即為二項試驗，利用集合表示，其樣本空間為：

$$\{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), \\ (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$$

三正面與三反面的機率為 $C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ ，出現二正面一反面或一正面二反面的機

$$\text{率為 } C_2^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

那為什麼叫它為二項分配？反應較快的同學，應該很快就可以看出，上面我

們在求有幾次成功時，它一般項的長相跟我們高二在學二項式定理很像，這也是他名字的由來。現在我們是考慮在 n 個試驗中，有 i 個成功， $n-i$ 個失敗，如果我們已經知道那些試驗是成功的，那它們的機率便是 $p^i(1-p)^{n-i}$ ，但是 n 個試驗中，可以選擇 i 個成功，故再乘以 C_i^n 。因此其一般項 $C_i^n p^i(1-p)^{n-i}$, $i=0,1,\dots,n$ 。且

$\sum_{i=0}^n C_i^n p^i(1-p)^{n-i} = [p+(1-p)]^n = 1^n = 1$ 。也就是說這些就是所有的可能。接著我們來看看二項分配的例子。

Example2.

擲一粒公正骰子 10 次，試問恰得 3 個 1 點的機率為何？

Solution.

擲一粒公正骰子獲得 1 點的機率為 $\frac{1}{6}$ ，不是 1 點的機率為 $\frac{5}{6}$ ，

$$\text{所求} = C_3^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7.$$

既然我們已經介紹過機率上期望值的定義，我們就實際來看看二項分配的期望值吧！首先我們還是來看一個實際的例子。

Example3.

擲一粒公正骰子 5 次，試求出現 1 點次數之期望值。

Solution.

在解這個題目之前，我們看看有沒有直觀的看法，看出期望值的意義。回想一下，我們在高二時，介紹到期望值的時候，我們有談到期望值有“平均”的概念在裡面，如果我們今天把這個題目想成“丟骰子 5 次，平均有幾個 1 點”。相信很多人就會回答： $\frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}$ 次。也就是說，我們看平均每次丟到正面的比例是 $\frac{1}{6}$ ，共

丟了 5 次，所以平均而言是 $\frac{5}{6}$ 次。恭喜你！這正好是正確的答案，事實上期望值

很多的題目也都可以這樣去計算。在數學的學習上，直觀的學習是很重要的。那現在我們回過頭來，我們如何用數學去證明這個結果呢？

$$\begin{aligned} \text{所求 } \mu &= \sum_{k=0}^5 k C_k^5 \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k} = 0 \cdot C_0^5 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 1 \cdot C_1^5 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 2 C_2^5 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &\quad + 3 C_3^5 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 C_4^5 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 5 C_5^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 20 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 30 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\
&= 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \right] \\
&= \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \right)^4 = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Note. 注意你對此期望值的解釋，這裡的解釋是，每個試驗進行時，丟 5 次銅板，進行很多試驗之後，平均而言，出現了 $\frac{5}{6}$ 次 1 點，在這裡每次試驗丟的總數是固定的。(這個例子中是 5 次)

一般而言，對於一個二項試驗，若每次成功的機率為 p ，失敗的機率為 $1-p$ ，每個試驗的次數為 n 次，則

① 成功次數的期望值為 $\mu = np$ 。

② 成功次數的標準差為 $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ 。(推衍過程可參考我寫的講義 Random

Variable 中 Properties of Binomial Random Variable, 可自我的個人網頁

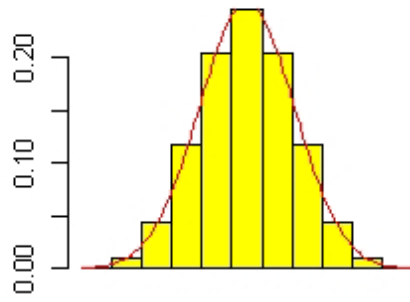
<http://web.cc.ntnu.edu.tw/~494402345/> 中相關資源中下載)

我們在高二下時，我們有談到如果當 n 足夠大時，成功次數的機率分布會近似於一個以期望值 np ，標準差為 $\sqrt{np(1-p)}$ 的常態分配。由於此理論(中央極限定理)已超過高中範圍，底下我們僅以圖示表示。

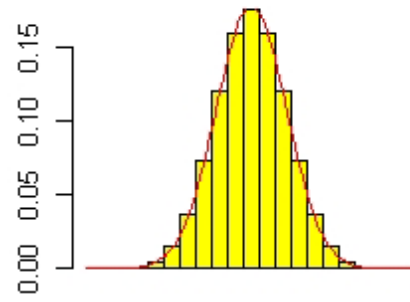
下列各圖，以黃色的直方圖代表二項分配的機率分布圖，紅色曲線為期近似的常態分配，由圖可看出當試驗次數 n 越大時，二項分配會近似於常態分配，且不論成功的機率 p 為何。

Note. 一般來說，我們通常會用常態去逼近二項分配，必須要滿足 $np(1-p) \geq 10$ 。也就是說如果他的變異數夠大的話，這會是一個良好的估計。

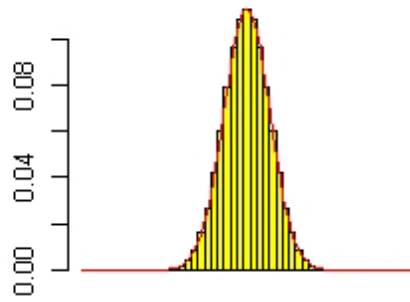
$n=10, p=0.5$



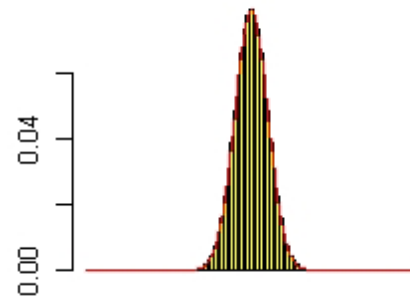
$n=20, p=0.5$



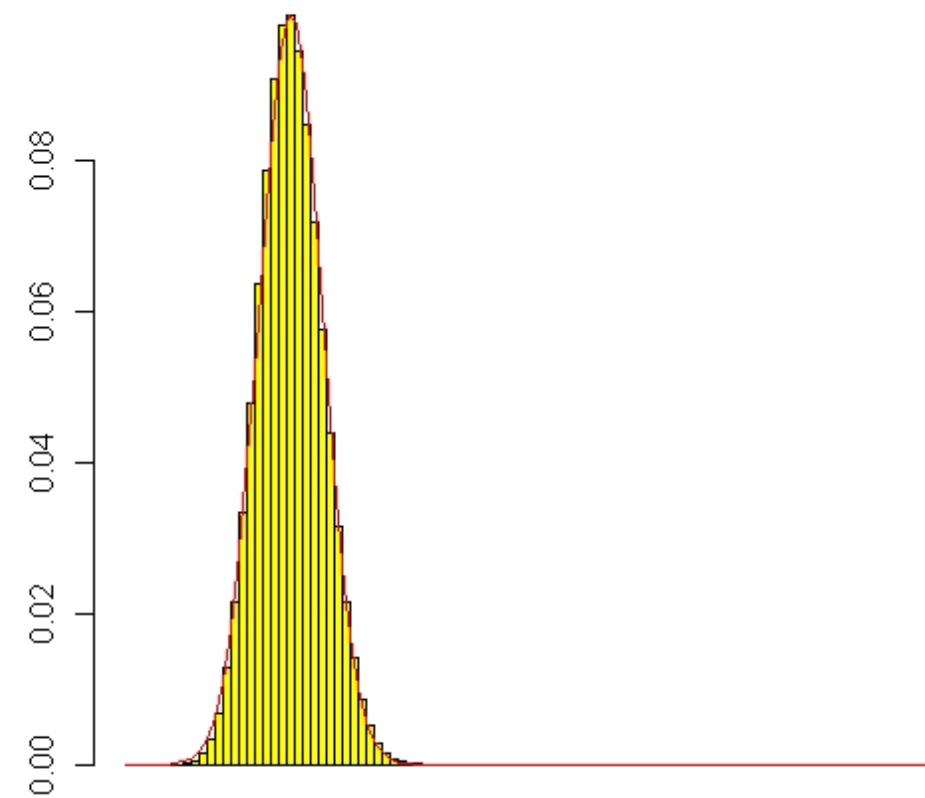
$n=50, p=0.5$



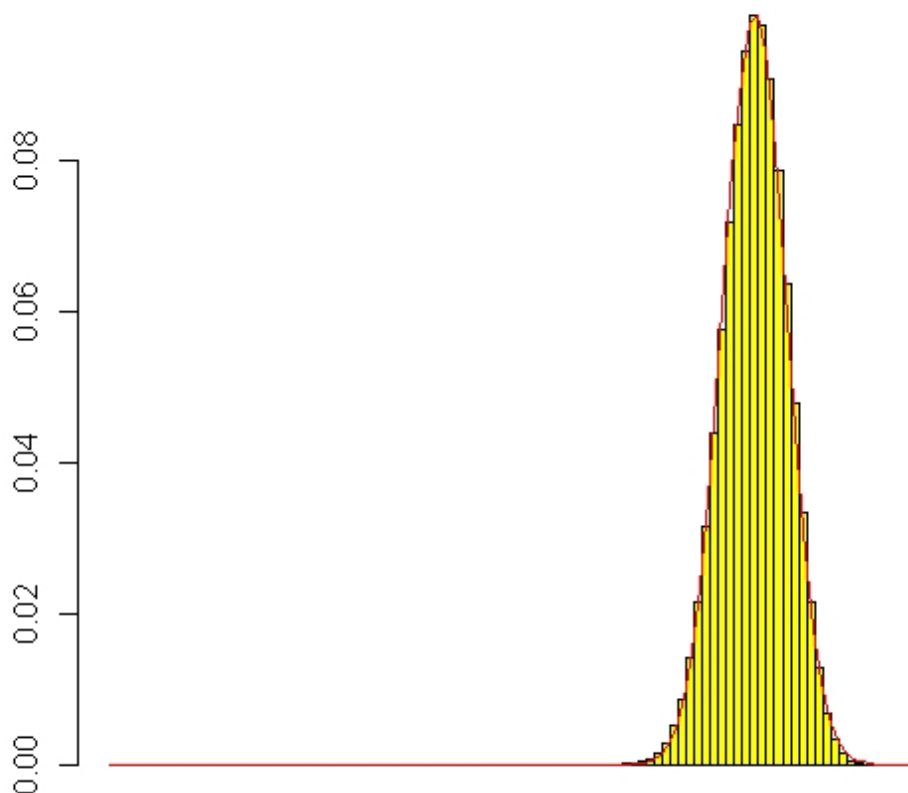
$n=100, p=0.5$



$n=100, p=0.2$



n=100, p=0.8



讓我們來看看，我們如何利用常態分配來計算二項分配的機率問題。

Example4.

擲一枚均勻的硬幣 100 次，試求出現正面次數介於 40 到 60 次(不含 40 與 60 次)間的機率。

Sol.

所求 = $\sum_{k=41}^{59} C_k^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}$ 我們會發現這個計算困難重重，還好的是現在有電

腦，可以輔助我們計算，但是依然是很麻煩。

我們改用當次數足夠大，且 $np(1-p) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25 \geq 10$ ，故其近似於常態分配。

二項分配的期望值 $\mu = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ ，標準差 $\sigma = \sqrt{25} = 5$ 。

因此會近似於一個期望值為 50，標準差為 5 的常態分配。

$(40, 60) = (50 - 2 \cdot 5, 50 + 2 \cdot 5)$ ，也就是說它落在 μ 兩個標準差內，由常態分配的理论知道，此一區間發生的機率約為 0.95，故擲一枚均勻硬幣 100 次，出現正面次數介於 40 次到 60 次的機率約為 0.95。

Note. 有些書會談到需要連續校正，因為我們從直方圖畫連續的曲線圖，中間所

佔的面積可能會差 0.5 個單位，不過我們這裡只有粗略的估計，因此我們就不細談，有興趣的同學可以自行參閱相關的書。