第四單元 等差數列與等比數列

4-1 等差數列

把錢存在銀行裡，銀行會依據你存入的本金定期給付一定比例的利息，如果本金是 P，月利率是 r，每個月就給付利息 $I = Pr$ 。假設本金 P 維持不變，每個月的利息 I，逐月領取，則 1 個月，2 個月，3 個月，…， n 個月後的本利和，依序為：

$$P+I \text{ ， } P+2I \text{ ， } P+3I \text{ ，} \ldots \text{，} P+nI$$

形成一個等差數列。

例題 1

將 100 萬元存入銀行，設月利率為 0.15% ，利息逐月計算，不併入本金，則一年後，本利和共有多少錢？

$\boxed{\text{解}}$

每月利息 $I = 1000000 \times 0.15\% = 1500$ （元）

12 個月後，本利和為

$1000000 + 1500 \times 12 = 1018000$ （元）

立即演練

將 100 萬元存入銀行，設年利率為 2% ，利息逐年計算，不併入本金，則 5 年後，本利和共有多少錢？

在例 3 及其後的立即演練中，利息逐期計算，不併入本金的計息方式，稱為單利計息。

習題 4-1

1. 設一等差數列，第 9 項爲 100，公差爲 12，求首項。
2. 設一等差數列，第 7 項爲 15，第 15 項爲 7，求第 100 項。
3. 設一等差數列的第 n 項爲 a_n，已知 $a_1 = 20$，$a_2 = \frac{137}{7}$，求 $|a_n|$ 的最小值。
4. 設一等差數列，前 10 項的和是 125，前 20 項的和是 300，求前 30 項的和。
5. 設一等差數列，第 15 項爲 -8，前 15 項的和爲 15，求前 50 項的和。

4-2 等比數列

給一數列

$$3，6，12，24，48，96，192，384，768$$

其中任意相鄰兩項，後項比前項的比值都相等，都是 2，我們稱它爲等比數列，公比爲 2。一個等比數列，假設第 1 項爲 a_1，第 2 項爲 a_2，第 3 項爲 a_3，⋯，第 n 項爲 a_n，若公比爲 r，則

$$\frac{a_2}{a_1}=r，\frac{a_3}{a_2}=r，\cdots，\frac{a_n}{a_{n-1}}=r$$

故

$$a_2=a_1r，a_3=a_2r=a_1r^2，\cdots，a_n=a_{n-1}r=a_1r^{n-1}$$

得到第 n 項 a_n 與首項 a_1 的關係爲

$$a_n=a_1r^{n-1}$$

例題 1

設一等比數列，首項爲 10，公比爲 $-\frac{3}{2}$，求第 4 項與第 7 項。

$\boxed{\text{解}}$

令第 n 項爲 a_n，公比爲 r，則 $a_1=10$，$r=-\frac{3}{2}$，且

$$a_4=a_1r^3=10(-\frac{3}{2})^3=10(-\frac{27}{8})=-\frac{135}{4}$$

$$a_7=a_1r^6=10(-\frac{3}{2})^6=10\cdot\frac{729}{64}=\frac{3645}{32}$$

立即演練

設一等比數列，首項爲 –13，公比爲 2，試求第 6 項與第 10 項。

例題 2

設一等比數列，第 5 項是 12，第 8 項是 $-24\sqrt{2}$，求此數列的第 13 項。

$\boxed{\text{解}}$

設首項是 a，公比爲 r，則

$$\begin{cases} ar^4=12\cdots\cdots① \\ ar^7=-24\sqrt{2}\cdots\cdots② \end{cases}$$

$\dfrac{②}{①}$，得

$r^3=-2\sqrt{2}$ ， $r=-\sqrt{2}$……③

③代入①，得

$a(-\sqrt{2})^4=12$ ， $4a=12$ ， $a=3$

故第 13 項爲 $3(-\sqrt{2})^{12}=3\cdot 2^6=192$ 。

立即演練

設一等比數列，首項爲 -8 ，第 3 項爲 -18 ，求此數列的第 7 項及第 8 項。

　　前面說過單利計息，即利息雖逐月計算，但不併入本金，維持本金每期固定的計息方式，這種計息方式不爲存款人喜愛。比較合理的方式是利息逐期計算，且將利息併入本金，作爲下一期的本金。假設本金是 P，期利率是 r，則一期後的本利和爲

$$P+Pr=P(1+r)$$

兩期後的本利和爲

$$P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2$$

一般而言，1 期，2 期，⋯，n 期後的本利和，依序爲

$$P(1+r)\ ,\ P(1+r)^2\ ,\ P(1+r)^n$$

形成一個等比數列。這種計息方式稱爲複利計息。

例題 3

將100萬元存入銀行，設月利息爲0.15%，按月複利計息，則1年後本利和共有多少錢？（ $1.0015^{12}\fallingdotseq 1.018149$ ）

$\boxed{\text{解}}$

12 個月後，本利和爲

$1000000\times(1+0.0015)^{12}=1000000\times 1.0015^{12}$

$\fallingdotseq 1000000\times 1.018149$（ 1.0015^{12} 的值可用計算機求得）$=1018149$

故一年後之本利和爲1018149元

立即演練

將100萬元存入銀行，設年利率 2% ，按年複利計息，則5年後本利和共有多少錢？（ $1.02^5\fallingdotseq 1.104081$ ）

一個等比數列，設首項爲 a，公比爲 r，則前 n 項依序爲

$$a，ar，ar^2，\cdots，ar^{n-1}$$

這 n 個數的總和令爲 S_n，則

$$S_n = a + ar + ar^2 + ，\cdots，+ ar^{n-1} \cdots ①$$

當 $r=1$時，$ar = ar^2 = \cdots = ar^{n-1} = a$，故 $S_n = na$

當 $r \neq 1$時，$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \cdots\cdots ②$

考慮 ①−②，並將等號右端兩式中之相同項消掉，得

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

即首項爲 a，公比爲 r 的等比數列，前 n 項之和爲 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，亦可表爲

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

例題 4

設一等比數列，首項爲10，公比爲$-\dfrac{1}{2}$，求此等比數列前8項的和。

$\boxed{解}$

前 8 項的和，$S_8 = \dfrac{10[1-(-\frac{1}{2})^8]}{1-(-\frac{1}{2})} = \dfrac{10(1-\frac{1}{256})}{\frac{3}{2}} = \dfrac{20}{3} \times \dfrac{255}{256} = \dfrac{425}{64}$

立即演練

設一等比數列，首項爲 −24，公比爲$\dfrac{4}{3}$，求此等比數列前 6 項的和。

例題 5

每年年初存入銀行 1 萬元，持續 10 年，設年利率2%，按年複利計息，則 10 年後之

本利和爲何？（$1.02^{10} \fallingdotseq 1.2190$）

解

第 1 次，第 24 次，⋯，第 10 次之存款，所生之本利和依序爲

10000×1.02^{10}，10000×1.02^{9}，⋯，10000×1.02

其總和爲

$$10000\times1.02+10000\times1.02^2+\cdots+10000\times1.02^{10}=\frac{10000\times1.02\times(1.02^{10}-1)}{1.02-1}$$

$$\fallingdotseq 510000\times(1.2190-1)=111690$$

故 10 年後之本利和爲 111690 元

立即演練

每年年初存入銀行 5 萬元，連續 3 年，設年利率爲 4%，逐年複利計算，則 3 年後的本利和共多少錢？（元以下四捨五入）

例題 6

作邊長爲 1 的正方形，取各邊中點爲頂點又連成一正方形，再取各邊中點連成正方形，如此繼續操作，共得 5 個正方形，如圖 4−1 所示，求：

(1) 最內層正方形的邊長。

(2) 這 5 個正方形的周長總和。

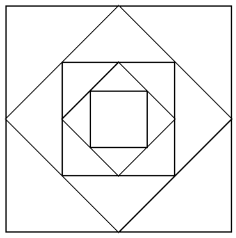


圖 4-1

解

(1) 正方形由外而內之邊長成一等比數列，首項爲 1，公比爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 故最內層（第 5 層）之邊長爲

$$1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

(2) 周長亦成等比數列，首項爲 4，公比爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 故 5 個正方形之周長總和爲

$$\frac{4\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{8\left(1-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)}{2-\sqrt{2}}=\frac{8-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=7+3\sqrt{2}$$

立即演練

作邊長爲 1 的正三角形，取各邊中點爲頂點又連成正三角形，再取中點連成正三角形，如此繼續操作，共得 4 個正三角形，如圖 4 – 2 所示，求：

(1) 最內層正三角形的邊長。

(2) 這 4 個正三角形的面積總和。

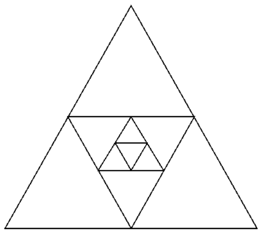


圖 4-2

習題 4-2

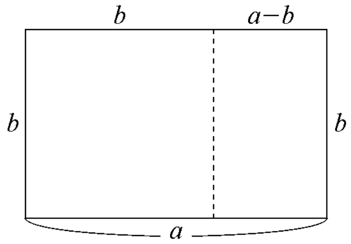
1. 設一等比數列，首項爲 3，第 2 項爲 $-\dfrac{3}{2}$，求第 5 項。

2. 設一等比數列，第 7 項爲 $-\dfrac{1}{4}$，第 18 項爲 2，求第 29 項。

3. 設一等比數列，首項是 1，公比是 -2，求前 10 項的和。

4. 設一等比數列，首項是 5，第 n 項是 80，前 n 項的和是 155，求 n。

5. 有一矩形紙板，長 a 寬 b，剪掉以寬爲邊的正方形，如右圖所示。已知所剩之矩形與原矩形之長寬比相同，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a-b}$。



(1) 求 $\dfrac{a}{b}$。

(2) 將剩餘之矩形再剪掉以寬爲邊的正方形，依此方式繼續操作，一共剪掉 4 個正方形，求最後所剩矩形之面積與原矩形面積的比值。