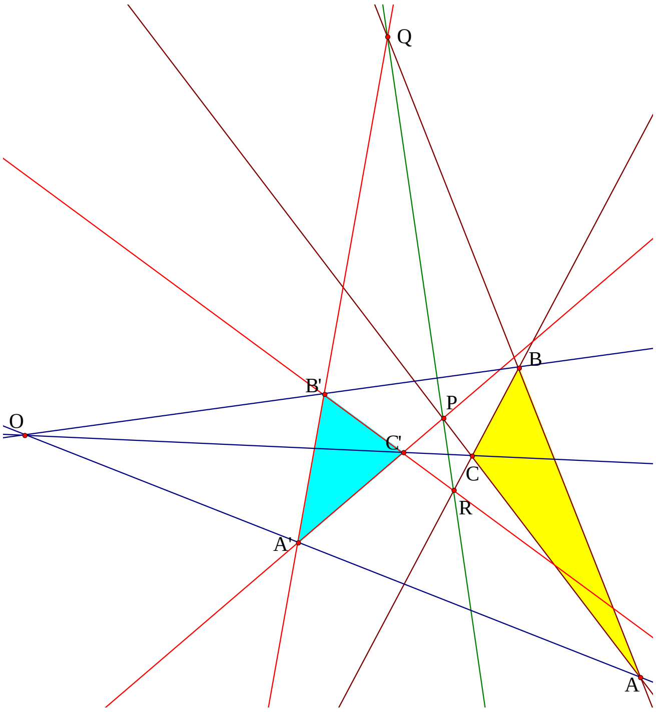
Theorem(*Disargues Theorem of Homologous Triangles*)**.** 假設有一個 point O 與 $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ 在同一個 plane 或是三個 space. 若它們都是從 O 有關的 projection, 也就是說 $O-A-A', O-B-B', O-C-C'$ 是 collinear. 則依照順序 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{B'C'}$, $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{C'A'}$ 的 intersection points 是 collinear. 反過來說，若存在三對相對應的三個 points 在同一條 straight line 上，則此三組相對應的 vertices 會交在同一個 point(當然是指關於 projection).

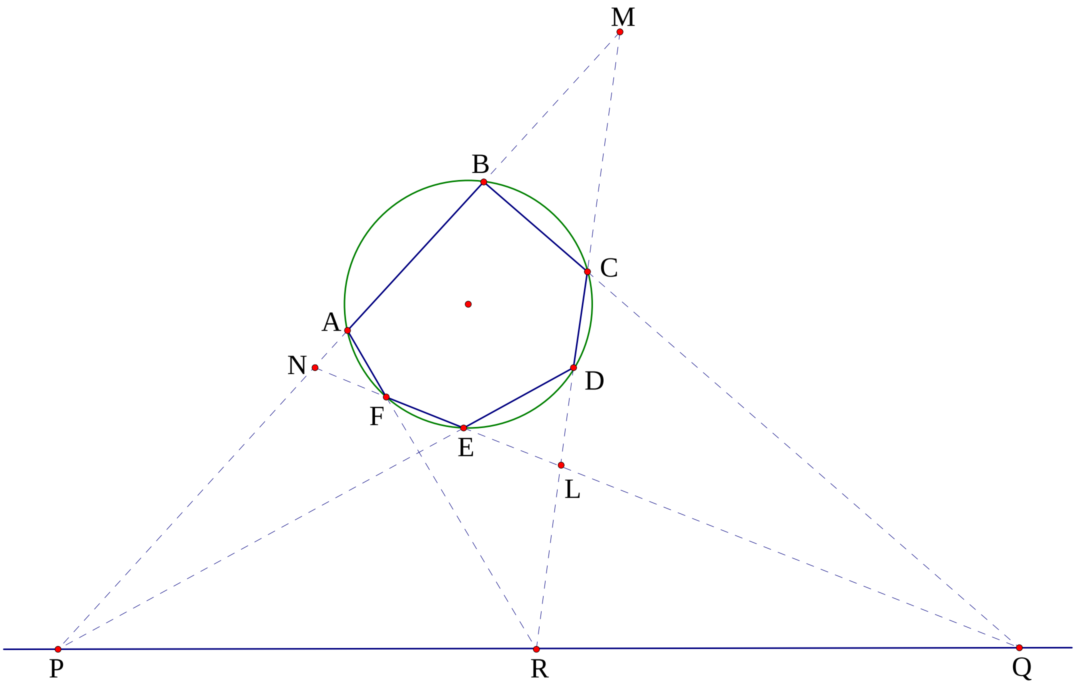
Proof. $(\Rightarrow)$ 如下圖所示，將 $\overleftrightarrow{PQ}$ project 到 infinity $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{A'C'}$. 因此我們可以得到 $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{B'C'}$, 其 intersection points 是 collinear(在 infinity line).

$(\Leftarrow)$ 假設 $P-Q-R$. 將 $P-Q-R$ project 到 infinity $\Rightarrow \Delta ABC, \Delta A'B'C'$ 它們對應的邊互相 parallel, $\therefore \overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ 在 point O concurrent.



Theorem(*Pascal's Hexagon*)**.** 令一個 hexagon inscribed 在一個(nonsingular point) conic. 則三個在每對 opposite sides 會 intersection 的 point 是 collinear. 反過來說，若一個 hexagon 的 opposite sides(沒有任意的三個 points 在一條 straight line 上)，則 6 個 vertices 再會在一個 nonsingular point-conic

【想法】: 設 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 M; $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{EF}$ 交於 N; $\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 L, 考慮 ΔLMN, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BC}$ 都看成 ΔLMN 之截線，引用 Menelaus 定理。



Proof.

$\overleftrightarrow{DE}$ 為 ΔLMN 之截線，由 Menelaus 定理得到

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}\cdot\frac{\overline{NE}}{\overline{EL}}\cdot\frac{\overline{LD}}{\overline{DM}}=1\cdots①$$

$\overleftrightarrow{AF}$ 為 ΔLMN 之截線，同理可得 $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{AN}}\cdot\dfrac{\overline{NF}}{\overline{FL}}\cdot\dfrac{\overline{LR}}{\overline{RM}}=1\cdots②$

$\overleftrightarrow{BC}$ 為 ΔLMN 之截線，故 $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{BN}}\cdot\dfrac{\overline{NQ}}{\overline{QL}}\cdot\dfrac{\overline{LC}}{\overline{CM}}=1\cdots③$

再加上圓冪定理得到

$$\begin{cases}\overline{NA}\cdot\overline{NB}=\overline{NF}\cdot\overline{NE}\\ \overline{LD}\cdot\overline{LC}=\overline{LE}\cdot\overline{LF}\quad\cdots④\\ \overline{MB}\cdot\overline{MA}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}\end{cases}$$

①×②×③再配合④得到

$$1=\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}\cdot\frac{\overline{NQ}}{\overline{QL}}\cdot\frac{\overline{LR}}{\overline{RM}}\right)\left(\frac{\overline{NE}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{NF}}{\overline{NB}}\right)\left(\frac{\overline{LD}}{\overline{LE}}\cdot\frac{\overline{LC}}{\overline{LF}}\right)\left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}\cdot\frac{\overline{NQ}}{\overline{QL}}\cdot\frac{\overline{LR}}{\overline{RM}}\right)\cdot1\cdot1\cdot1$$

$$\therefore\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}\cdot\frac{\overline{NQ}}{\overline{QL}}\cdot\frac{\overline{LR}}{\overline{RM}}=1$$

由 Menelaus 逆定理知 P, Q, R 三點共線。

Note: 事實上 Pascal Theorem 也有其對應的等價定理，我們稱為 Brianchon Theorem，討論六邊形頂點切線共點等等問題，需要用到 polar 等理論。

Pascal(法國，1623~1662)小時候利用摺紙觀察出三角形內角和為180°. 他深受 Desargues 的影響，他在 17 歲就證明了圓錐曲線上的神秘六邊形定理(超強的天才)，上述是一個特例。換句話說，若將上面的圓改為任一圓錐曲線，結論也是對的。從這裡我們也可以發現 projective geometry 中任意的圓錐曲線我們視為是同樣的(很神奇吧)！