林柏佐

大學入學考試中心

九十八學年度學科能力測驗試題

數學考科

第一部分：選擇題

壹、單選題

1.數列 $a_1+2,\cdots,a_k+2k,\cdots,a_{10}+20$ 共有十項，且其和為240, 則 $a_1+\cdots+a_k+\cdots a_{10}$ 之值為

(1)31 (2)120 (3)130 (4)185 (5)218

答案：(3)

解：由題意：$\sum_{k=1}^{10} a_k+2k=240$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k+2\sum_{k=1}^{10} k=240$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k+10\cdot 11=240 \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=130$$ 故選(3)

2.令 $a=\cos(\pi^2)$, 試問下列哪一個選項是對的？($\pi\approx 3.142$)

(1) $a=-1$ (2) $-1<a\le -\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}<a\le 0$ (4) $0<a\le \frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}<a\le 1$

答案：(2)

解：π^2(弧度)$\approx 3.142\cdot 180^\circ=565.56^\circ=205.56^\circ$

$$\therefore a=\cos(\pi^2)\approx\cos(205.56^\circ)=\cos(180^\circ+35.56^\circ)=-\cos(35.56^\circ)$$

$$\because 30^\circ<35.56^\circ<45^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(35.56^\circ)<\frac{\sqrt{3}}{2} \therefore -1<-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}\le -\frac{1}{2}$$

故選(2)

3.已知 $f(x),g(x)$ 是兩個實係數多項式，且知 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 x^4-1. 試問下列哪一個選項<u>不可能</u>是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的公因式？

(1)5 (2) $x-1$ (3) x^2-1 (4) x^3-1 (5) x^4-1

答案：(4)

解：由輾轉相除法原理知 $f(x),g(x)$ 的最高公因式

與 $g(x),x^4-1$ 的最高公因式是一樣的，故其公因式必為 x^4-1 的因式

(1)O: $x^4-1=5\cdot\frac{1}{5}(x^4-1)\therefore 5\mid x^4-1$

(2)O: $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)\therefore x-1\mid x^4-1$

(3)O: $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)\therefore x^2-1\mid x^4-1$

$(4)\times: x^4-1=(x^3-1)\cdot x+x-1 \therefore x^2-1 \nmid x^4-1$

$(5)\text{O}: x^4-1=(x^4-1)\cdot 1 \therefore x^4-1 \mid x^4-1$ 故選(4)

4.甲、乙、丙三所高中的一年級分別有3, 4, 5個班級。從這12個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的11個班級中隨機選取一班參加英文抽考。則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？

(1)21% (2)23% (3)25% (4)27% (5)29%

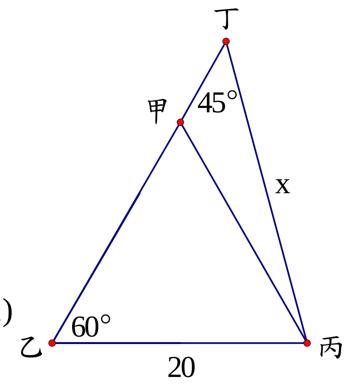
答案：(5)

解：所求$=P($抽到甲班$)+P($抽到乙班$)+P($抽到丙班$)$

$$=\frac{3\cdot 2}{12\cdot 11}+\frac{4\cdot 3}{12\cdot 11}+\frac{5\cdot 4}{12\cdot 11}=\frac{3+6+10}{66}=\frac{19}{66}=0.2\overline{87}\approx 0.29 \quad \text{故選(5)}$$

5.假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為20公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為

(1)24.5公里 (2)25公里 (3)25.5公里 (4)26公里(5)26.5公里



答案：(1)

解：由題意，如右圖所示：

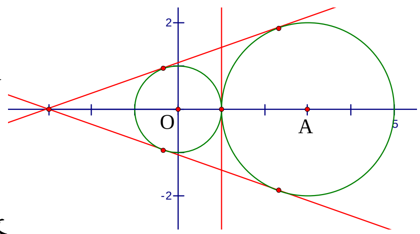
令丙丁的距離為x

由正弦定理知：

$$\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{20}{\sin 45^\circ} \therefore x=\frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\approx 24.5\text{ km} \quad \text{故選(1)}$$

6.試問坐標平面上共有幾條直線，會使得點$O(0,0)$到此直線之距離為1，且點$A(3,0)$到此直線之距離為2？

(1)1條 (2)2條 (3)3條 (4)4條 (5)無窮多條



答案：(3)

解：如右圖所示：

事實上及求兩圓外切之公切線的個數

公切線有三條 故選(3)

貳、多選題

7.試問下列哪些選項中的數是有理數？

(1)3.1416 (2)$\sqrt{3}$ (3)$\log\sqrt{5}+\log\sqrt{2}$ (4)$\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

(5)方程式$x^3-2x^2+x-1=0$的唯一實根

答案：(1)(3)(4)

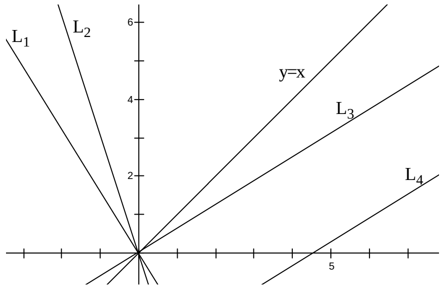
解：$(1)\text{O}: 3.1416=\dfrac{31416}{10000}=\dfrac{3927}{1250}$ $(2)\times:\sqrt{3}$為無理數

(3)O: $\log\sqrt{5}+\log\sqrt{2}=\log\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$ (4)O: $\tan 15^{\circ}+\cot 15^{\circ}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

(5)×:由牛頓定理知其可能有理根為±1

但±1代入此方程是皆不合，其實根必為無理數 故選(1)(3)(4)

8.坐標平面上四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 與 x 軸、y 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如圖所示，其中 L_1 與 L_3 垂直，而 L_3 與 L_4 平行。設 L_1, L_2, L_3, L_4 的方程式分別為 $y=m_1x, y=m_2x, y=m_3x$ 以及 $y=m_4x+c$. 試問下列哪些選項是正確的？



(1) $m_3>m_2>m_1$

(2) $m_1m_4=-1$

(3) $m_1<-1$

(4) $m_2m_3<-1$

(5) $c>0$

答案：(2)(3)(4)

解：(1)×:由圖形知：$m_3>m_1>m_2$ (2)O: $\because L_1\perp L_4 \Rightarrow m_1m_4=-1$

(3)O:由圖形知：$m_1<-1$ (4)O: $m_2<m_1, m_3>0 \Rightarrow m_2m_3<m_1m_3=-1$

(5)×:由圖形知：截距 $c<0$ 故選(2)(3)(4)

9.某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比(以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在95%信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為 $[0.5, 0.58], [0.08, 0.16]$. 試問下列哪些選項是正確的？

(1)甲地本次的參訪者中，54%的人聽過該產品

(2)此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數

(3)此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於95%

(4)若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有95%的機會落在區間 $[0.08, 0.16]$

(5)經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的四倍，則在95%信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半(即0.04)

答案：(1)(2)

解：(1)O: $\hat{p}_{甲}=\dfrac{0.5+0.58}{2}=0.54$

(2)O: $\hat{p}_{乙}=\dfrac{0.08+0.16}{2}=0.12$

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}_{甲}(1-\hat{p}_{甲})}{n_{甲}}}=\frac{0.58-0.5}{2}, \frac{0.54\cdot 0.46}{n_{甲}}=0.0004 \therefore n_{甲}=\frac{0.54\cdot 0.46}{0.0004}=621$$

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}_{乙}(1-\hat{p}_{乙})}{n_{乙}}}=\frac{0.16-0.08}{2}, \frac{0.12\cdot 0.88}{n_{乙}}=0.0004 \therefore n_{乙}=\frac{0.12\cdot 0.88}{0.0004}=264$$

$\therefore n_{甲} > n_{乙}$

(3)×: p 與 $[0.08, 0.16]$ 皆固定，因此無機率(機會)可言

(4)×:實際知名度 p 有95%的機會落在新區間中

(5)×:信賴區間的寬度也受調查的 $\hat{p}$ 影響 故選(1)(2)

10.設 a, b, c 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解 (2)若此線性方程組有解，則 $11a-3b \neq 7$

(3)若此線性方程組有解，則 $c=14$ (4)若此線性方程組無解，則 $11a-3b=7$

(5)若此線性方程組無解，則 $c \neq 14$

答案：(4)(5)

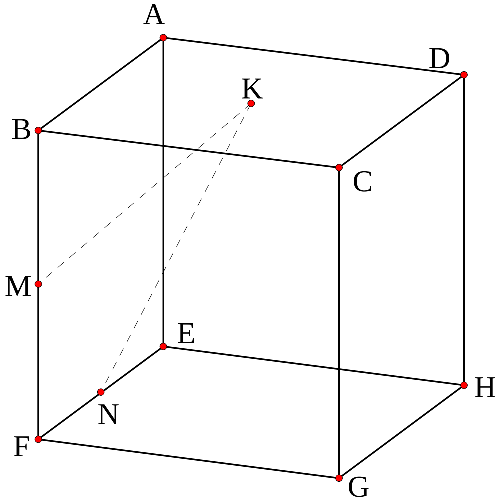
解：其增廣矩陣為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 4 & b & -1 \\ 2 & 10 & 7 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & b-3a & -4 \\ 0 & 6 & 7-2a & c-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3a-b & 4 \\ 0 & 0 & -11a+3b+7 & c-14 \end{array}\right]$$

(1)×:不一定，有可能有無限多解 (2)×:不一定，可能無限多解

(3)×:不一定 (4)(5)O此兩個條件皆須滿足，則此方程式無解 故選(4)(5)

11.如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於2(即 $\overline{AB}=2$), K 為正方形 $ABCD$ 的中心，M, N 分別為線段 BF, EF 的中點。試問下列哪些選項是正確的？



(1) $\overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AE}$

(2)(內積) $\overline{KM} \cdot \overline{AB} = 1$

(3) $\overline{KM} = 3$

(4) ΔKMN 為一直角三角形

(5) ΔKMN 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

答案：(1)(4)

解：將圖形坐標化

$A(0,0,0), B(2,0,0), D(0,2,0), E(0,0,-2), K(1,1,0), M(2,0,-1), N(1,0,-2)$

(1)O:由圖形即可得知 (2)×: $\overline{KM} \cdot \overline{AB} = (1,-1,-1) \cdot (2,0,0) = 2$

$(3)\times:\overline{KM}=\left|\overline{KM}\right|=\sqrt{3}$

$(4)\text{O}:\overline{KM}\cdot\overline{MN}=(1,-1,-1)\cdot(-1,0,-1)=0$ 故 $\angle KMN=90^\circ$

$(5)\times:\Delta KMN=\frac{1}{2}\overline{KM}\,\overline{MN}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 故選(1)(4)

第二部分：選填題

A.從1到100的正整數中刪去所有的質數、2的倍數及3的倍數之後，剩下最大的數為______.

答案：95

解：$100=2\cdot 50, 99=3\cdot 33, 98=2\cdot 49, 97$ 是一個質數，$96=2\cdot 48$

$95=5\cdot 19$, 故95是剩下最大的數

B.坐標平面上有四點 $O(0,0), A(-3,-5), B(6,0), C(x,y)$. 今有一質點在 O 點沿 $\overline{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後停在 P, 再沿 $\overline{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在 Q. 假設此質點繼續沿 $\overline{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點 O, 則 $(x,y)=($______, ______$)$.

答案：$(-4,20)$

解：$\overline{OP}=\overline{AO}=(3,5)\therefore P(3,5), \overline{PQ}=2\overline{BP}=2(-3,5)=(-6,10)\therefore Q(-3,15)$

$\overline{QO}=3\overline{CQ}\Rightarrow(3,-15)=3(-3-x,15-y)$

$(1,-5)=(-3-x,15-y)\therefore(x,y)=(-4,20)$

C.抽獎遊戲中，參加者自箱中抽出一球，確定顏色後放回。只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，其金額分別為(抽得藍色球者)2000元、(抽得紅色球者)1000元。箱中已置有2顆藍色球及5顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得消費券金額的期望值為300元，則主辦單位應於箱內再置入________顆其他顏色的球。

答案：23

解：設再置入 n 顆球，由期望值為300元得到

$$\frac{2}{n+7}\cdot 2000+\frac{5}{n+7}\cdot 1000=300$$

$$\frac{90}{n+7}=3$$

$$n+7=\frac{90}{3}=30\therefore n=23$$

D.坐標平面上有兩條平行直線。它們的 x 截距相差 20, y 截距相差15. 則這兩條平

行直線的距離為________.

答案：12

解：令此兩條平行線為$L_1:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\Rightarrow bx+ay=ab$

$L_2:\dfrac{x}{a+20}+\dfrac{y}{b+15}=1\Rightarrow (b+15)x+(a+20)y=(a+20)(b+15)$

$L_1 // L_2 \Rightarrow \dfrac{b}{b+15}=\dfrac{a}{a+20}$

$ab+20b=ab+15a$

$4b=3a \therefore a:b=4:3$

令 $a=4r,b=3r$ 代回 $L_1:3rx+4ry=12r^2\Rightarrow 3x+4y=12r$

$L_2:(3r+15)x+(4r+20)y=(4r+20)(3r+15)\Rightarrow 3x+4y=12(r+5)$

$d(L_1,L_2)=\dfrac{|12(r+5)-12r|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{60}{5}=12$

E.假設Γ_1為坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸為$x=-\dfrac{3}{4}$且焦距(焦點到頂點的距離)為$\dfrac{1}{8}$. 若Γ_1與另一拋物線$\Gamma_2:y=x^2$恰交於一點，則Γ_1的頂點之y坐標為________. (化成最簡分數)

答案：$\dfrac{9}{8}$

解：令Γ_1的頂點$V\left(-\dfrac{3}{4},k\right)\Rightarrow\Gamma_1:\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2=4\cdot\dfrac{1}{8}(y-k)$

$\Gamma_2:y=x^2$代入得到$x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{16}=\dfrac{1}{2}(x^2-k)$

$2x^2+3x+\dfrac{9}{8}=x^2-k$

$x^2+3x+k+\dfrac{9}{8}=0$

交於一點： $D=3^2-4\cdot1\cdot\left(k+\dfrac{9}{8}\right)=9-4k-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}-4k=0\therefore k=\dfrac{9}{8}$

F.某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的75%. 公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少______%的二氧化碳的排放量。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

常用對數表 $\log N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表			尾			差		
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
								…											
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
								…											
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4

註1.表中所給的對數值為小數點後的值。

2.表中最左欄的數字表示 N 的個位數及小數點後第一位，最上一列的數字表示 N 的小數點後第二位。

答案：5.6

解：設每年減少的比率為 r

由題意：$(1-r)^5=0.75$

$5\log(1-r)=-1+\log 7.5=-1+0.8751=-0.1249$

$\log(1-r)=-0.02498=-1+0.97502=-1+\log 9.4412=\log 0.94412$

$\Rightarrow 1-r=0.94412 \Rightarrow r=0.05588\approx 0.056=5.6\%$

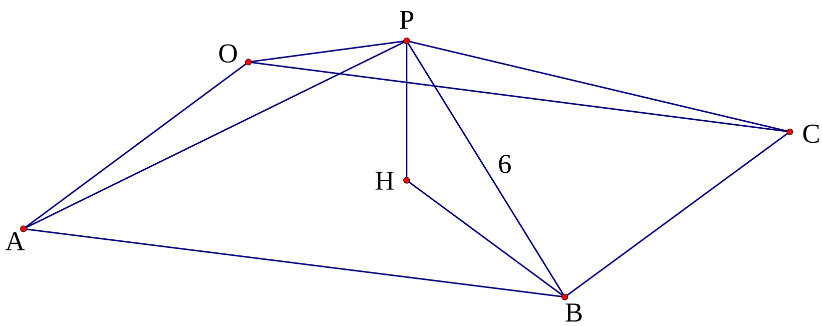
G.坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0),A(8,0,0),B(8,8,0),C(0,8,0)$. 另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O,A,B,C 四點的距離皆等於6. 若 $x+by+cz=d$ 為通過 A,B,P 三點的平面，則 $(b,c,d)=($____, ____, ____$)$.

答案：$(0,2,8)$

解：所求即一正四角錐

故 P 對 xy 平面的投影點

即為 O,A,B,C 的中心 $H(4,4,0)$



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{36-32}=2$

$\therefore P(4,4,2)$

$\overline{AB}=(0,8,0)=8(0,1,0)$

$\overline{AP}=(-4,4,2)=-2(2,-2,-1)$

$\overline{N}=(0,1,0)\times(2,-2,-1)=(-1,0,-2)=-(1,0,2)$

所求平面方程式為：$x+2z=8 \therefore (b,c,d)=(0,2,8)$

H.有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 F_1,F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 P 為此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}=64$，則 $\overline{F_1F_2}=$________.

答案：16

解：$\left(\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right)^2=\left(\overline{PF_1}+\overline{PF_2}\right)^2-\overline{F_1F_2}^2$

$\overline{PF_1}^2-2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=\overline{PF_1}^2+2\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2-\overline{F_1F_2}^2$

$\overline{F_1F_2}^2=4\overline{PF_1}\,\overline{PF_2}=4\cdot 64=256$

$\therefore \overline{F_1F_2}=16$

I.在 ΔABC 中，$\overline{AB}=10,\overline{AC}=9,\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$. 設點 P,Q 分別在邊 AB,AC 上使得 ΔAPQ 之面積為 ΔABC 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值為____________.(化成最簡分數)

答案：$\frac{15}{2}$

解：令 $\overline{AP}=x,\overline{AQ}=y$

$xy=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9=45$

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos A$

$=x^2+y^2-2\cdot 45\cdot\frac{3}{8}=x^2+y^2-\frac{135}{4}$

$\geq 2xy-\frac{135}{4}=2\cdot 45-\frac{135}{4}=\frac{225}{4}$

$\therefore \overline{PQ}\geq\frac{15}{2}$