林柏佐

九十七學年度指定科目考試試題

數學乙

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.根據一百多年來的氣象紀錄，美國費城年雨量平均值為41.0英吋，標準差為6.1英吋。今欲將此項統計資料的單位由英制換為公制，請問該城市一百多年來年雨量的標準差最接近下列的哪一個選項？(註：1英吋等於25.4毫米。)

(1)0.240毫米 (2)1.61毫米 (3)6.10毫米 (4)155毫米 (5)1041毫米

答案：(4)

解：設毫米為 y，英吋為 x

$\Rightarrow y = 25.4x$

$\Rightarrow S_y = 25.4S_x = 25.4\cdot 6.1 = 154.94$

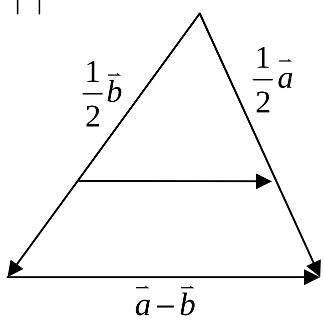
最接近155，故選(4)

2.兩向量以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示，並以 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 表示 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積，以 $|\vec{a}|,|\vec{b}|$ 分別表示 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的長度，試問下列哪一個選項表示：「三角形兩邊中點的連線段與第三邊平行，且其長度為第三邊之半。」？

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (2) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ (3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$

(4) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=2(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b})$ (5) $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

答案：(2)



解：第三邊我們可以用 $\vec{a}-\vec{b}$ 表示

由圖形可知兩邊中點連線段所表示的向量為 $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

而我們可以很簡單由向量的分配律得到這個等式成立

因此可以得到底邊會與兩邊中點連線平行，且長度為一半 故選(2)

3.解下列聯立方程式時，

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x-5y=-1 \end{cases}$$

將相關的係數與常數以矩陣 A 表達如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

對矩陣 A 進行高斯消去法的一個步驟：第一列不改變，並將第二列減去第一列

的四倍成為新的第二列。

試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對A進行上述步驟？

(1)$\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$

(4)$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$

答案：(5)

解：事實上左乘一個矩陣，我們可以利用單位矩陣來看，

如果單位矩陣第一列不改變，並將第二列減去第一列的四倍成為新的第二列

可得$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}$，故選(5)

也可以直接由矩陣乘法的定義，計算而得答案為(5)

二、多選題

4.有一個不公正的骰子，投擲的時候，二點、三點、四點、五點和六點出現的機率都是$\log\left(\frac{3}{2}\right)$，今以$a$表$\log\left(\frac{3}{2}\right)$，以$b$表投擲的時候一點出現的機率，請選出正確的選項。

(1)$a>0$ (2)$a>1$ (3)$b<\frac{1}{6}$ (4)$b<\log\left(\frac{3}{2}\right)$ (5)$a>b$

答案：(1)(3)(4)(5)

解：(1)O: $a>\log 1=0$

(2)×: $a<\log 10=1$

(3)O: $b=1-5\log\frac{3}{2}=1-5(\log 3-\log 2)$

$=1-5\cdot(0.4771-0.3010)=1-5\cdot 0.1761$

$=1-0.8805=0.1195<0.1\overline{6}=\frac{1}{6}$

(4)O: $b-\log\left(\frac{4}{3}\right)=b-(2\log 2-\log 3)$

$=0.1195-(0.6020-0.4771)=-0.0054<0$

$\therefore b<\log\left(\frac{4}{3}\right)$

(5)O: $a-b=\log\left(\frac{3}{2}\right)-\left[1-5\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]=6(\log 3-\log 2)-1$

$=6\cdot 0.1761-1=0.0566>0$

$\therefore a>b$ 故選(1)(3)(4)(5)

5.給定二次多項式$f(x)=x^2+ax+b$，已知多項式x^3+3x^2+4x+2除以$f(x)$其餘式為$3x+2$，多項式x^3+x^2-x-1除以$f(x)$其餘式為$4x+1$，請選出正確的選項。

(1) $a=3$ (2) $b=-1$ (3)方程式 $f(x)=0$ 無實根 (4) $f(x)$ 的極小值為 $\frac{5}{4}$

(5) $f(x)$ 除以 $(x+3)$ 其餘式為1

答案：(1)(5)

解：由除法原理：存在兩個多項式 $q_1(x), q_2(x)$

使得 $\begin{cases} x^3+3x^2+4x+2=f(x)q_1(x)+3x+2 \\ x^3+x^2-x-1=f(x)q_2(x)+4x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+3x^2+x=f(x)q_1(x) \\ x^3+x^2-5x-2=f(x)q_2(x) \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) \mid x^3+3x^2+x,\ f(x) \mid x^3+x^2-5x-2$

$\Rightarrow f(x) \mid (x^3+3x^2+x)-(x^3+x^2-5x-2)=2x^2-6x+2=2(x^2-3x+1)$

$\therefore f(x) \mid x^2+3x+1$ 比較係數可得

$f(x)=x^2+3x+1 \Rightarrow a=3, b=1$

又 $f(x)$ 的 $D=3^2-4\cdot 1\cdot 1=5>0$

故 $f(x)$ 有兩相異實根

$f(x)=x^2+3x+1=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$

故 $f(x)$ 的極小值為 $-\frac{5}{4}$

又由餘式定理： $f(x)$ 除以 $(x+3)$ 其餘式為 $f(-3)=9-9+1=1$

故選(1)(5)

6.有四個相異的正整數，由小到大依序為 k, l, m, n, 其和等於16, 亦即 $0<k<l<m<n, k+l+m+n=16$. 請問單獨再增加下列哪一個選項中的條件，可以保證 k 等於1？

(1) l 是奇數，m 是偶數 (2) l, m 是偶數 (3) k, l, m, n 是等差數列 (4) l, n 是奇數

(5) l, m 是奇數

答案：(2)(3)

解：(1)×: $k=2, l=3, m=4, n=7 \Rightarrow k+l+m+n=16$

(2)O:若 $k\neq 1 \Rightarrow k\geq 2, l\geq 4, m\geq 6, n\geq 7 \Rightarrow k+l+m+n\geq 19>16 \rightarrow\leftarrow$ 故 $k=1$

(3)O:若 $k\neq 1$ 且令其公差 $d\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow k+l+m+n=4k+6d=16, 2k+3d=8$

由輾轉相除法可得： $k=1+3t, d=2-2t, t\in\mathbb{Z}$

但 $d\in\mathbb{N}$ 且 $k>0$, 故 $t=0$, 因此 $k=1$

(4)×: $k=2, l=3, m=4, n=7 \Rightarrow k+l+m+n=16$

(5)×: $k=2, l=3, m=5, n=6 \Rightarrow k+l+m+n=16$ 故選(2)(3)

7.請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a, 使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2+(2-a)x-2a<0$？

(1)−1, 0 (2)1, 2, 3,……(所有的正整數) (3)−3, −4, −5,……(所有小於−2的整數)

(4)97, 2008 (5)$-\pi,\pi$(π 是圓周率)

答案：(1)(4)

解：$x^2+(2-a)x-2a<0$

$(x+2)(x-a)<0$

解有兩種可能：一為 $-2<x<a$, 另一為 $a<x<-2$

因此其解一定同在-2的右邊或是左邊

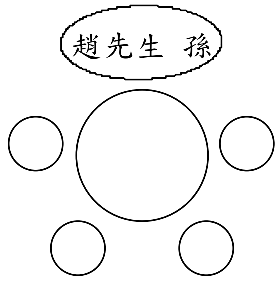
而且其區間一定是有限的 故選(1)(4)

三、選填題

A. 趙氏與錢氏兩對夫婦、以及孫先生、李先生圍坐一個六人座圓桌吃飯，其中趙先生和孫先生已在兩個相鄰的位子坐定。若限定夫妻不得相鄰，則其他四人就座的方法共有______種。

答案：10

解：如右圖，可將原題目，改成考慮以下的直線排列



孫 趙先生 __ __ __ __

分趙先生旁邊是錢氏夫婦的方法數：$2\cdot2\cdot2!=8$

與旁邊是李先生的方法數：$1\cdot1\cdot2!=2$

所求 $=8+2=10$ 種

B. 從集合$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\middle| a,b,c\text{為}0,1,2\text{或}3\right\}$中隨機抽取一個矩陣，其行列式為0的機率等於________。（化為最簡分數）

答案：$\dfrac{7}{16}$

解：$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}=ac=0\Rightarrow a=0\vee c=0$

所求 $=1-P\{a\neq0\wedge c\neq0\}$

$=1-\dfrac{3^2}{4^2}=\dfrac{7}{16}$

C.若三角形 ABC 的 $\overline{AB}=8,\overline{AC}=4\sqrt{5}$ 及 $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, 則 $\sin\angle ACB=$______.

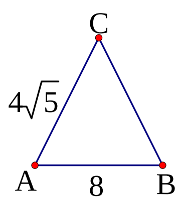
（化為最簡分數）

答案：$\dfrac{4}{5}$

解：由餘弦定理知：

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A=64+80-2\cdot8\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$=144-64=80$$



$\overline{BC}=4\sqrt{5}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

再由正弦定理：

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{BC}}{\sin A}$

$\frac{8}{\sin C}=\frac{4\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\Rightarrow \sin C=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

第貳部分：非選擇題

一、坐標平面上有兩條拋物線，第一條拋物線的頂點在$(-4,0)$，焦點在$(-4,4)$，第二條拋物線的頂點在$(4,4)$，焦點在$(4,0)$，求兩條拋物線的交點。

解：第一條拋物線：

頂點$(-4,0)$，焦距$=4$，開口向上

故其方程式為：$(x+4)^2=4\cdot 4y\Rightarrow y=\frac{1}{16}(x+4)^2\cdots$①

第二條拋物線：

頂點$(4,4)$，焦距$=4$，開口向下

故其方程式為：$(x-4)^2=-4\cdot 4(y-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{16}(x-4)^2+4\cdots$②

①與②解聯立可得

$\frac{1}{16}(x+4)^2=-\frac{1}{16}(x-4)^2+4$

$x^2+8x+16=-x^2+8x-16+64$

$2x^2-32=0$

$x^2-16=0$

$(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=\pm 4$

分別代回②與①可得

$y=4\vee 0$

故兩拋物線的交點為$(4,4),(-4,0)$

二、建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋。企劃部門的規劃如下：甲型屋每棟地價成本為500萬元，建築費用為900萬元，乙型屋每棟地價成本為200萬元，建築費用為1500萬元，公司在資金部分限制地價總成本上限為3500萬元，所有建築費用的上限為1億2000萬元；無論甲型或乙型售出，每棟獲利皆為500萬元，假設推出的預售屋皆可售出，請問推出甲、乙兩型預售屋

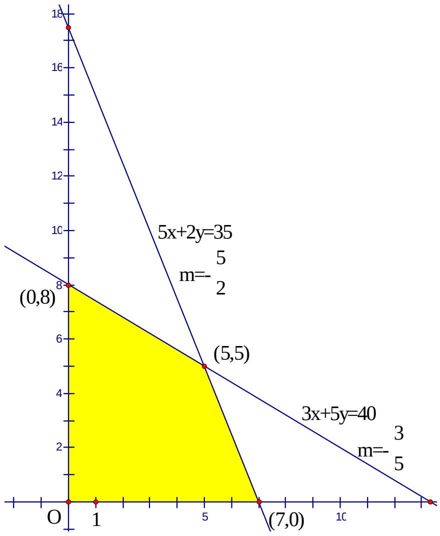
各幾棟，公司才可得到最大利潤。

解：設推出甲型預售屋x棟，乙型預售屋y棟

極大化目標函數$500x+500y$

限制條件$\begin{cases} 500x+200y\le 3500 \\ 900x+1500y\le 12000 \\ x,y\ge 0, x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} 5x+2y\le 35 \\ 3x+5y\le 40 \\ x,y\ge 0, x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}$



先考慮$x,y\in\mathbb{R}$的情形，可行解區域如右圖所示

其中$\begin{cases} 5x+2y=35 \\ 3x+5y=40 \end{cases}\Rightarrow x=y=5$

令$500x+500y=c$其斜率$m=-1$

由斜率判別知目標函數在$(5,5)$時(且為格子點)會產生極大值

故推出甲型預售屋5棟，乙型預售屋5棟，公司可得到最大利潤