林柏佐

大學入學考試中心

九十七學年度學科能力測驗試題

數學考科

第一部分：選擇題

壹、單選題

1.對任意實數 x 而言，$27^{x^2+\frac{2}{3}}$ 的最小值為

(1) 3 (2) $3\sqrt{3}$ (3) 9 (4) 27 (5) $81\sqrt{3}$

答案：(3)

解：$\because x^2+\dfrac{2}{3}$ 的最小值為 $\dfrac{2}{3}$

所求 $=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\cdot\frac{2}{3}}=3^2=9$

2.在職棒比賽中ERA值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：若此投手共主投 n 局，其總責任失分為 E，則其ERA值為 $\dfrac{E}{n}\times 9$. 有一位投手在之前的比賽中共主投了 90 局，且這 90 局中他的ERA值為3.2. 在最新的一場比賽中此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的ERA成為

(1) 2.9 (2) 3.0 (3) 3.1 (4) 3.2 (5) 3.3

答案：(2)

解：由題意 $\dfrac{E}{90}\cdot 9=3.2\Rightarrow E=32$

所求 $=\dfrac{32}{90+6}\cdot 9=\dfrac{1}{3}\cdot 9=3$ 故選(2)

3.有一個圓形跑道分內、外兩圈，半徑分別為 30，50 公尺。今甲在內圈以等速行走、乙在外圈以等速跑步，且知甲每走一圈，乙恰跑了兩圈。若甲走了 45 公尺，則同時段乙跑了

(1) 90 公尺 (2) 120 公尺 (3) 135 公尺 (4) 150 公尺 (5) 180 公尺

答案：(4)

解：甲與乙的速率比 $=2\pi\cdot 30:2\pi\cdot 50\cdot 2=3:10$

則乙走了 $45\cdot\dfrac{10}{3}=150$ 公尺

4.某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為O以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4. 例如：AA1234, AB4434為可出

現的車牌號碼；而AO1234, AB3444為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為A且最後一碼為4的車牌號碼個數為

(1) $25\cdot 9^3$ (2) $25\cdot 9^2\cdot 10$ (3) $25\cdot 900$ (4) $25\cdot 990$ (5) $25\cdot 999$

答案：(4)

解：所求＝全部－後三碼皆為4

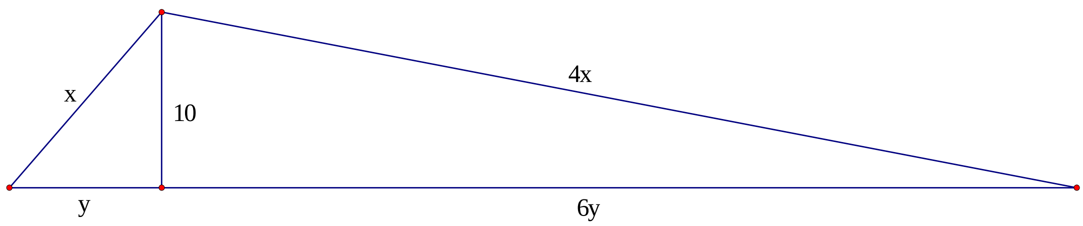
$$=25\cdot 10^3-25\cdot 10=25(1000-10)=25\cdot 990$$

5.廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的6倍；小明往正北方走了10公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的4倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？($\sqrt{3}\approx 1.732$)

(1) 60公尺 (2) 65公尺 (3) 70公尺 (4) 75公尺 (5) 80公尺

答案：(1)

解：由題意，如下圖所示



$$x^2-y^2=16x^2-36y^2$$

$$15x^2=35y^2$$

$$3x^2=7y^2\ \therefore x^2:y^2=7:3$$

令 $x^2=7r, y^2=3r,$

$$x^2-y^2=7r-3r=4r=100\ \therefore r=25$$

$$y^2=3\cdot 25\Rightarrow y=5\sqrt{3}$$

所求 $=7y=7\cdot 5\sqrt{3}=35\sqrt{3}\approx 35\cdot 1.732=60.62$ 故選(1)

貳、多選題

6.試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？

(1) $y=x+100$ (2) $y=x^2+1$ (3) $y=2+\sin x$ (4) $y=2^x$ (5) $y=\log x$

答案：(2)(3)(4)

解：(1)×: $x=-101, y=-1<0$

(2)O: $y=x^2+1\geq 0+1=1>0$

(3)O: $y=2+\sin x\geq 2-1=1>0$

(4)O: $y=2^x>0$ (5)×: $x=0.1, y=-1<0$ 故選(2)(3)(4)

林柏佐

7.某高中共有20個班級，每班各有40位學生，其中男生25人，女生15人。若從全校800人中以簡單隨機抽樣抽出80人，試問下列哪些選項是正確的？

(1)每班至少會有一人被抽中 (2)抽出來的男生人數一定比女生人數多

(3)已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率

(4)若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣

(5)學生A和學生B是兄弟，他們同時被抽中的機率小於$\dfrac{1}{100}$

答案：(4)(5)

解：(1)×:不一定 (2)×:不一定 (3)×:2人被抽中的機率皆為$\dfrac{C_{79}^{799}}{C_{80}^{800}}=\dfrac{1}{10}$

(4)O:此2者的機率皆為$\dfrac{C_{78}^{798}}{C_{80}^{800}}$

(5)O:所求$=\dfrac{C_{78}^{798}}{C_{80}^{800}}=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{79}{799}=\dfrac{79}{7990}<\dfrac{1}{100}$ 故選(4)(5)

8.已知a_1,a_2,a_3為一等差數列，而b_1,b_2,b_3為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？

(1)$a_1<a_2$與$a_2>a_3$可能同時成立 (2)$b_1<b_2$與$b_2>b_3$可能同時成立

(3)若$a_1+a_2<0$, 則$a_2+a_3<0$ (4)若$b_1b_2<0$, 則$b_2b_3<0$

(5)若b_1,b_2,b_3皆為正整數且$b_1<b_2$, 則b_1整除b_2

答案：(2)(4)

解：(1)×$\because a_2-a_1=a_3-a_2$

若$a_1<a_2\Rightarrow a_2-a_1=a_3-a_2>0\Rightarrow a_2<a_3\rightarrow\leftarrow$

故不可能同時成立

(2)O:EX:$b_1=-1,b_2=1,b_3=-1$

(3)×:EX:$a_1=-1,a_2=0,a_3=1$

(4)O:$b_1b_2<0\Rightarrow\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{b_2}{b_1}<0\Rightarrow b_2b_3<0$

(5)×:EX:$b_1=4,b_2=6,b_3=9$, 但$4\nmid 6$ 故選(2)(4)

9.已知在一容器中有A,B兩種菌，且在任何時刻A,B兩種菌的個數乘積為定值10^{10}. 為了簡單起見，科學家用$P_A=\log(n_A)$來記錄A菌個數的資料，其中n_A為A菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？$(\log 2\approx 0.3010)$

(1)$1\le P_A\le 10$ (2)當$P_A=5$時，B菌的個數與A菌的個數相同

(3)如果上週一測得P_A值為4而上週五測得P_A值為8, 表示上週五A菌的個數是上週一A菌個數的2倍

(4)若今天的P_A值比昨天增加1, 則今天的P_A菌比昨天多了10個

(5)假設科學家將B菌的個數控制為5萬個，則此時$5<P_A<5.5$

林柏佐

答案：(2)(5)

解：(1)$\times$:$\because 1 \le n_A \le 10^{10} \Rightarrow 0 \le P_A \le 10$

(2)O: $\log(n_A) = 5 \Rightarrow n_A = 10^5, n_A n_B = 10^{10} \therefore n_A = n_B = 10^5$

(3)$\times$: 上週一的 n_A 值為 10^4 而上週五的 n_A 值為 10^8，共差了 10^4 倍

(4)$\times$: P_A 值加1，個數多10倍

(5)O: $n_A = \dfrac{10^{10}}{5 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10^5 \Rightarrow \log(n_A) = 5 + \log 2 \approx 5.3010$ 故選(2)(5)

10.已知實係數多項式 $f(x)$ 與 $g(x) = x^3 + x^2 - 2$ 有次數大於0的公因式。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $g(x) = 0$ 恰有一實根 (2) $f(x) = 0$ 必有實根

(3)若 $f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 有共同實根，則此實根必為1

(4)若 $f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 有共同實根，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為一次式

(5)若 $f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 沒有共同實根，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為二次式

答案：(1)(3)(5)

解：由牛頓定理知，$g(x)$ 可能的有理根為 $\pm 1, \pm 2$,

$$\begin{array}{l|l} 1+1+0-2 & 1 \\ \quad +1+2+2 & \\ \hline 1+2+2 & \underline{+0} \end{array} \qquad \therefore g(x) = (x-1)(x^2+2x+2) = (x-1)[x-(-1+i)][x-(-1-i)]$$

(1)O: $g(x) = 0$ 恰有一實根1 (2)$\times$: 若 $f(x) = x^2 + 2x + 2$

(3)O:$\because g(x) = 0$ 只有一實根1

$\Rightarrow f(x) = 0$ 與 $g(x) = 0$ 有共同實根，則此實根必為1

(4)$\times$: 若 $f(x) = g(x)$ (5)O: $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式必為 $x^2 + 2x + 2$

故選(1)(3)(5)

11.設坐標空間中三條直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}; L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}; L_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

試問下列哪些選項是正確的？

(1) L_1 與 L_2 相交 (2) L_2 與 L_3 平行

(3)點 $P(0,-3,-4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離

(4)直線 $L: \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1, L_2 皆垂直 (5)三直線 L_1, L_2, L_3 共平面

答案：(1)(2)(4)(5)

解：(1)O:很顯然地，$(0,-3,-4)$ 為 L_1 與 L_2 的交點

(2)O: $\because (0,0,0)$ 不在 L_2 上，且 L_2 與 L_3 方向向量平行 $\Rightarrow L_2$ 與 L_3 平行

(3)×: 設 P 對 L 的投影點為 $H(t,3t,4t)$

$$\left|\overline{PH}\right| = \sqrt{t^2+9t^2+18t+9+16t^2+32t+16}$$

$$= \sqrt{26t^2+50t+25}$$

$$= \sqrt{26\left(t+\frac{25}{26}\right)^2+25-\frac{625}{26}}$$

$$\therefore d(P,L) = \left|\overline{PH}\right| = \sqrt{\frac{25}{26}},\ \text{但}\ \overline{PQ}=5$$

(4)O: 令方向向量 $\vec{v}=(0,4,-3), \overline{v_1}=(1,6,8), \overline{v_2}=(1,3,4)$

$\because L$ 與 L_1, L_2 皆相交於 $(0,-3,-4)$, 再加上 $\vec{v}\cdot\overline{v_1}=0, \vec{v}\cdot\overline{v_2}=0$

$\Rightarrow L$ 與 L_1, L_2 皆垂直

(5)O: 令 $L_1:\begin{cases} x=t \\ y=-3+6t, t\in\mathbb{R} \\ z=-4+8t \end{cases}, L_3:\begin{cases} x=s \\ y=3s, s\in\mathbb{R} \\ z=4s \end{cases}$

解 L_1, L_3, x, y 的解

$\begin{cases} t=s \\ -3+6t=3s \end{cases} \Rightarrow t=s=1$ 代入 z 符合，其有共同交點

也就是說，這3條線相交的情形為，兩平行線被一線所截

$\therefore$ 此三線共平面　故選(1)(2)(4)(5)

12.設 $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1) Γ 的圓心坐標為 $(5,0)$　(2) Γ 上的點與直線 $L:3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4

(3)直線 $L_1:3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切

(4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2:3x+4y=0$ 的距離等於 2

(5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3:3x+4y-5=0$ 的距離等於 2

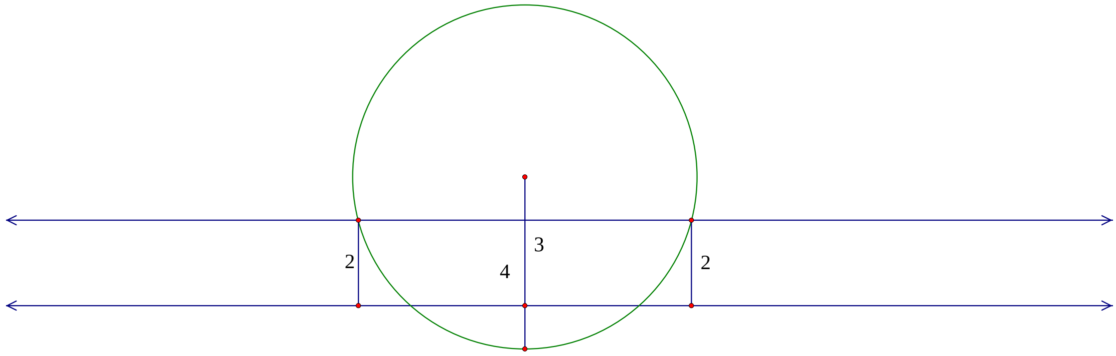
答案：(1)(2)(4)

解：(1)O:令 Γ 的圓心坐標O $(5,0)$

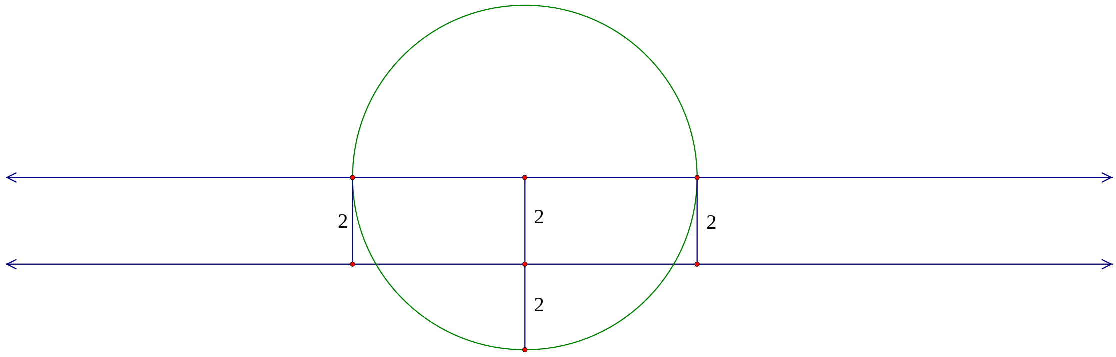
(2)O:半徑 $r=\sqrt{25-9}=4$, 所求 $=d(O,L)+r=\dfrac{|3\cdot5-15|}{5}+4=4$

(3)×: $d(O,L_1)=\dfrac{|3\cdot5+15|}{5}=6>4=r$ (直線與圓不相交)

(4)O: $d(O,L_2)=\dfrac{|3\cdot5|}{5}=3<4=r$, 直線與圓相交，由下圖知有兩個交點



$(5)\times: d(O,L_3)=\dfrac{|3\cdot 5-5|}{5}=2<4=r$ 直線與圓相交，由下圖知有3個交點



故選(1)(2)(4)

第二部分：選填題

A.令 $A(-1,6,0),B(3,-1,-2),C(4,4,5)$ 為坐標空間中三點。若 D 為空間中的一點且滿足 $3\overline{DA}-4\overline{DB}+2\overline{DC}=\vec{0}$, 則點 D 的坐標為(____ , ____ , ____).

答案：$(-7,30,18)$

解：$3(\overline{OA}-\overline{OD})-4(\overline{OB}-\overline{OD})+2(\overline{OC}-\overline{OD})=\vec{0}$

$\overline{OD}=3\overline{OA}-4\overline{OB}+2\overline{OC}=(-3,18,0)-(12,-4,-8)+(8,8,10)=(-7,30,18)$

B.在坐標平面上，設 A 為直線 $3x-y=0$ 上一點，B 為 x 軸上一點。若線段 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\left(\dfrac{7}{2},6\right)$, 則點 A 的坐標為(__ , ____), 點 B 的坐標為(__ , 0).

答案：$(4,12),(3,0)$

解：令 $A(x,y)$

由題意 $y=2\cdot 6-0=12$, 代入直線方程式得：

$3x-12=0\Rightarrow x=4$

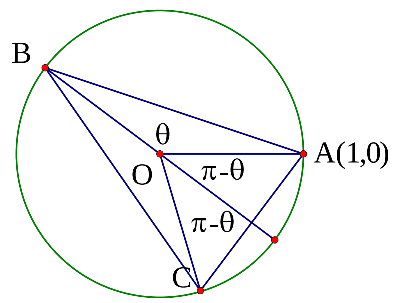
B 的 x 坐標為 $2\cdot\frac{7}{2}-4=3$

C.坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0),B,C,$ 且 $\overline{AB}=\overline{BC}.$

已知銳角三角形 OAB 的面積為 $\frac{3}{10}$，則 ΔOAC 的面積為____.(化為最簡分數)

答案：$\frac{12}{25}$

解：設 $\angle AOB=\theta$



由題意知半徑為1

$\Delta OAB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta=\frac{\sin\theta}{2}=\frac{3}{10}$

$\sin\theta=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{4}{5},\angle AOC=2(\pi-\theta)$

$\sin AOC=\sin(2\pi-2\theta)=-\sin 2\theta$

$=-2\sin\theta\cos\theta=-2\cdot\frac{3}{5}(-\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$（$\cos\theta=\frac{4}{5}$ 不合)

$\Delta OAC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin AOC=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}=\frac{12}{25}$

D.設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，且 $P(-4,1)$ 為 Γ 上一點。若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點 $D,$ 則 D 的 x 坐標為____.

答案：-2

解：由雙曲線的光學性質知

所求即過 P 的切線與 x 軸的交點

代切點公式可得：

$\frac{-4x}{8}-y=1\Rightarrow x+2y+2=0$

$y=0$ 代入 $\Rightarrow x=-2$

E.設 $O(0,0,0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $(2,2,1),(2,-1,-2),(3,-6,6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面 $E:x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則

$(b,c,d)=($ ____ , __ , __ $).$

答案：$(-2,2,9)$

解：令 $A(2,2,1),B(2,-1,-2),C(3,-6,6)$

E 的法向量 $\overline{N}=(1,b,c)$

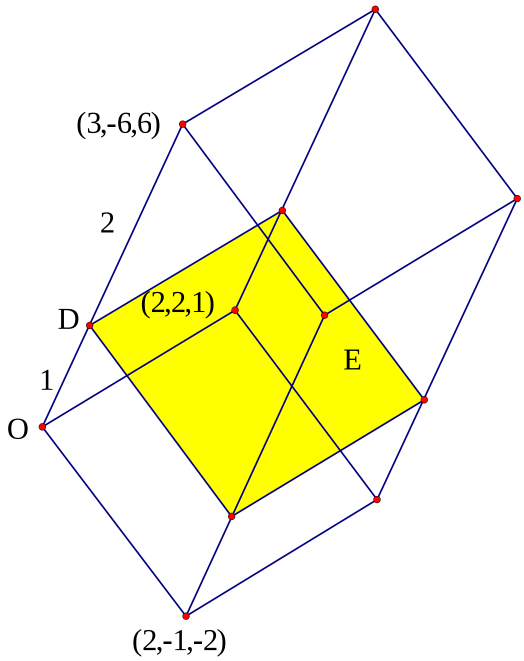
$\overline{OA}=\overline{OB}=3,\overline{OC}=9$

此為以 O, A, B 3 點，邊長為3的正立方體

$$\overline{N} \,//\, \overline{OA} \times \overline{OB} = (2,2,1) \times (2,-1,-2)$$

$$= (-3,6,-6) = -3(1,-2,2)$$

$$\therefore \overline{N} = (1,-2,2)$$



令 D 為 $\overline{OC}$ 與 E 的交點

由分點公式知：

$$D\left(\frac{3}{3}, -\frac{6}{3}, -\frac{6}{3}\right) = (1,-2,-2)$$

代入 E 得到：

$$1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = d \Rightarrow d = 9$$

故 $(b,c,d) = (-2,2,9)$

F.設 a, b 為正整數。若 $b^2 = 9a$, 且 $a + 2b > 280$, 則 a 的最小可能值為______.

答案：225

解：$a = \dfrac{b^2}{9}$ 代入 $a + 2b > 280$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{9} + 2b > 280$$

$$b^2 + 18b - 2520 > 0 \Rightarrow (b-42)(b+60) > 0$$

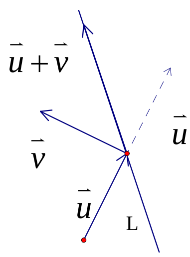
$\therefore b > 42$ 且 $9 \mid b^2 \Rightarrow 3 \mid b$, 故最小的 $b = 45$

$$a = \frac{45^2}{9} = 15^2 = 225$$

G.坐標平面上有一質點沿方向 $\vec{u} = (1,2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L, 使得

此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向 $\vec{v} = (-2,1)$

前進，則直線 L 的方向向量應為 $\vec{w} = (1,$ ____ $)$.



答案：$(1,-3)$

解：延伸一倍 $\vec{u}$ 如右圖所示

$\vec{w} \,//\, \vec{u}, \vec{v}$ 的角平分向量

$$\because |\vec{u}| = |\vec{v}| \Rightarrow \vec{w} \,//\, \vec{u} + \vec{v} = (-1,3) = -(1,-3)$$

$$\therefore \vec{w} = (1,-3)$$

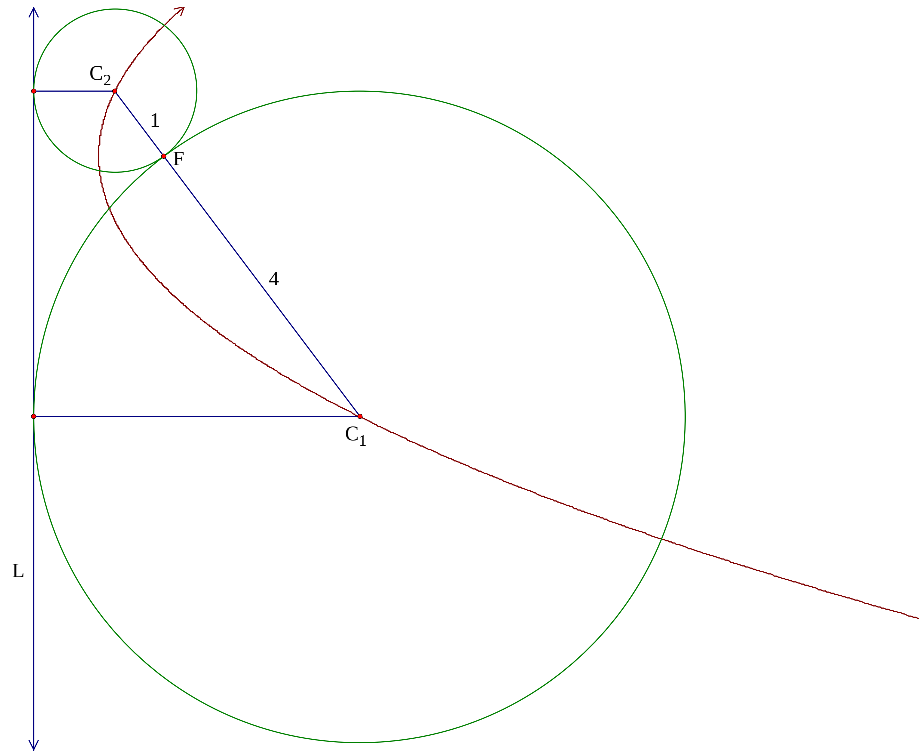
林柏佐

H.已知坐標平面上圓 $O_1:(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 $O_2:(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 $L:x=-5$ 相切。若 Γ 為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標為(____ , ____).（化為最簡分數）

答案：$\left(-\frac{1}{5},\frac{53}{5}\right)$

解：令圓心 $C_1(7,1),C_2(-2,13)$, 半徑 $r_1=12,r_2=3$

2 圓的切點為 F, 如下圖所示



$\because \overline{C_1F}=d(C_1,L)=r_1,\overline{C_2F}=d(C_2,L)=r_2$

$\Rightarrow F$ 為 Γ 的焦點

由分點公式 $\Rightarrow F\left(\frac{1\cdot 7-4\cdot 2}{5},\frac{1\cdot 1+4\cdot 13}{5}\right)=\left(-\frac{1}{5},\frac{53}{5}\right)$