林柏佐

九十六學年度指定科目考試試題

數學乙

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.科學家測得南極上空臭氧層的破洞面積大約是2300萬平方公里，約相當於北美洲的面積。根據上述數據，估計地球的表面積，請選出最接近地球表面積的選項：

(1) $5\cdot10^6$ 平方公里 (2) $5\cdot10^7$ 平方公里 (3) $5\cdot10^8$ 平方公里 (4) $5\cdot10^9$ 平方公里
(5) $5\cdot10^{10}$ 平方公里

答案：(3)

解：北美洲的面積大約占地球表面積的 $\dfrac{1}{20}$

$\therefore$ 地球的表面積 $\approx 2.3\times10^7\times20=4.6\times10^8$ 故選(3)

2.某地區12歲以上人口中吸煙的比率為28%. 今將12歲以上人口區分為中老年、青壯年及青少年三類，所佔比率各為30%、45%及25%.已知中老年與青壯年人口中吸煙的比率各為25%與30%, 請問青少年人口中吸煙的比率為多少？選出正確的選項：

(1) 24% (2) 28% (3) 32% (4) 36% (5) 40%

答案：(2)

解：設青少年人口吸煙率為 x

$$0.3\times0.25+0.45\times0.3+0.25x=0.28$$
$$\Rightarrow 0.25x+0.21=0.28$$
$$\Rightarrow 0.25x=0.07$$
$$\therefore x=\frac{7}{25}=28\%$$

3.中國古代流傳的一本數學書中有下面這段文字：（標點符號為現代人所加）今有多數21, 少數15, 問等數幾何？草曰：置21於上，15於下，以下15除去上21, 上餘6；又以上6除去下15, 下餘3；又以下3除去上6, 適盡。則下3為等數合問。

在上文中「等數」指的是：

(1) 兩數之和 (2)兩數之差 (3)兩數之積 (4)兩數之商 (5)兩數之最大公因數

答案：(5)

解：由文字說明知其為輾轉相除法的過程：

$$21=15\cdot1+6$$
$$15=6\cdot2+3$$

$6=3\cdot 2$ $\therefore$ 由輾轉相除法知，$(21,15)=3$

$\therefore 3$ 為 21,15 的最大公因數 故選(5)

二、多選題

4.假設地面是一個可以無限延伸的平面，如果採用形狀大小一致的大理石地磚鋪在地面上，並且要求鋪設時地磚之間緊密連接不留空隙，試問可以採用哪一種形狀的地磚？請選出正確的選項：

(1)正三角形 (2)正方形 (3)圓形 (4)正五邊形 (5)正六邊形

答案：(1)(2)(5)

解：正多邊形中只有正三角形、正方形、正六邊形可以撲滿平面，

而半徑一定的圓無法填滿空隙 故選(1)(2)(5)

5.下面每一個選項都是以行列式表達坐標平面上的方程式，請問哪些選項代表橢圓？

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ (2) $\begin{vmatrix} x^2 & 2y^2 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ (3) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 2x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ (4) $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & y & x^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

(5) $\begin{vmatrix} x^2-y^2 & y & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

答案：(2)(3)

解：(1)×: $\Rightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow x+2y-5x=0$ $\therefore$ 為一條直線

(2)O: $\Rightarrow x^2+4y^2-5x=0$

$\Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2+4y^2=\frac{25}{4}$ $\therefore$ 為一橢圓

(3)O: $\Rightarrow x^2+2y^2-10x=0$

$\Rightarrow (x-5)^2+2y^2=25$ $\therefore$ 為一橢圓

(4)×: $\Rightarrow (x^2+y^2)+2y-5x^2=0$

$\Rightarrow 4x^2-y^2-2y=0$ $\therefore$ 為一雙曲線

(5)×: $\Rightarrow (x^2-y^2)+2y-5x=0$ $\therefore$ 為一雙曲線

故選(2)(3)

6.假設 a,b 是整數，且 $b\neq 0.$ 已知 $c=\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i$ 是實係數一元二次方程式 $x^2+kx+1=0$ 的一個解。請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\frac{1}{c}$ 是上述方程式的另外一個解 (2) $\frac{1}{c}=\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i$ (3) $c+\frac{1}{c}=k$

(4) k 一定是整數 (5) a 一定是奇數

答案：(1)(2)(5)

解：(1)O:設另外一根為 α

由根與係數 $\Rightarrow c\alpha=1\Rightarrow \alpha=\frac{1}{c}(\because b\neq 0\Rightarrow c\neq 0)$

(2)O:又 $\because x^2+kx+1=0$ 為實係數方程式

$\Rightarrow$ 複數根共軛出現 $\therefore \frac{1}{c}=\bar{c}=\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i$

(3)×:再由根與係數: $c+\frac{1}{c}=-k\neq k$

$(\because k\neq 0,$ 若 $k=0,$ 兩根為 $\pm i$ ，但 $b\neq 0, b\in\mathbb{Z}\Rightarrow c\neq \pm i \rightarrow\leftarrow \quad \therefore k\neq 0)$

(4)×:EX: $a=1, b=2\Rightarrow x=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$

$\Rightarrow (3x-1)^2=-8$

$\Rightarrow 9x^2-6x+9=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{2}{3}x+1=0 \quad \therefore k=-\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}$

(5)O: $\because c\cdot\frac{1}{c}=(\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i)(\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i)=\frac{a^2}{9}+\frac{2b^2}{9}=1$

$\Rightarrow a^2+2b^2=9,$ 若 $a=2k, k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2(2k^2+b^2)=9\Rightarrow 2|9\rightarrow\leftarrow \quad \therefore a$ 是奇數

7. x 代表實數，請選出正確的選項：

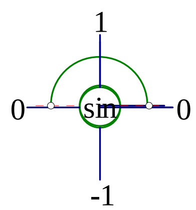
(1)當 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 時， $\cos 2x$ 之值恆為正 (2)當 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 時， $\sin 2x$ 之值恆為正

(3)不論 x 為何， $\cos^2 x-\sin^2 x\leq\frac{1}{2}$ 恆成立 (4)不論 x 為何， $\sin x\cos x\leq\frac{1}{2}$ 恆成立

(5)不論 x 為何， $\sin x+\cos x\leq\frac{3}{2}$ 恆成立

答案：(2)(4)(5)

解：(1)×: $x=\frac{\pi}{4}, \cos 2x=\cos\frac{\pi}{2}=0\ \cancel{>}\ 0$



(2)O: $\because 0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<2x<\pi$

由圖知， $0<\sin 2x<1 \quad \therefore \sin 2x$ 恆正

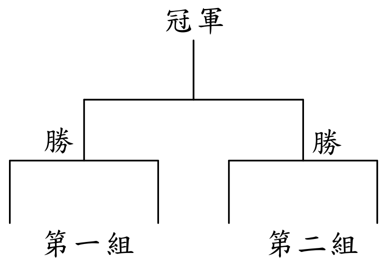
(3)×:EX: $x=0, \cos^2 x-\sin^2 x=1-0=1>\frac{1}{2}$

(4)O: $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\le\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

(5)O:由疊合知：$\sin x+\cos x\le\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ 故選(2)(4)(5)

三、選填題

A. 某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如下圖：



根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為0.5. 則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為 ________________ (四捨五入到小數三位)。

答案：0.167

解：所求$=\dfrac{C_1^2C_1^1 0.5^2}{C_2^4C_2^2\frac{1}{2!}}=\frac{0.5}{3}=\frac{1}{6}=0.1\overline{6}\approx 0.167$

B. 平面上坐標皆為整數的點稱為格子點。我們將原點以外的格子點分層，方法如下：若(a,b)是原點$(0,0)$以外的格子點，且$|a|$和$|b|$中最大值為n, 則稱(a,b)是在第n層的格子點(例如$(3,-4)$是在第4層；$(8,-8)$是在第8層)。則在第15層的格子點個數為______.

答案：120

解：我們只需先考慮$a>0$, 且$b>0$即可，算出來乘4倍

再加上坐標軸上點的個數即可

令$A=\{(15,b)$ 是第15層的格子點，$b>0\}$

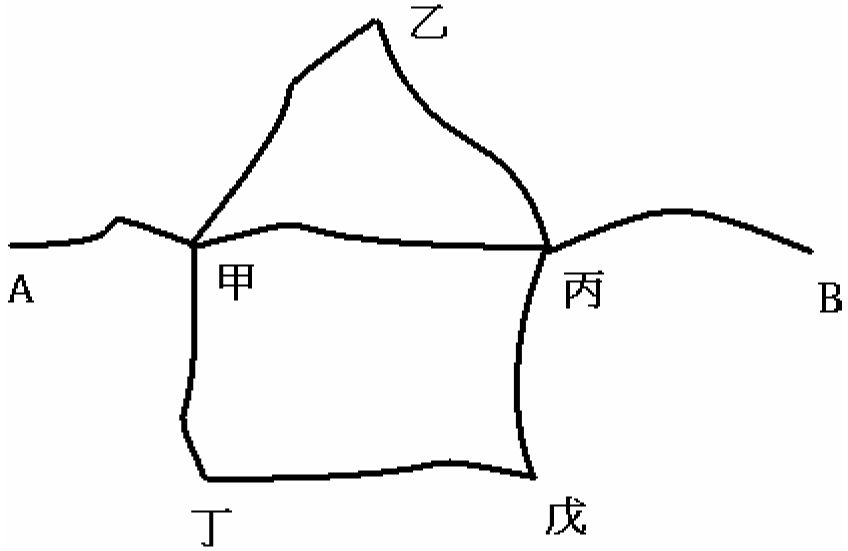
$B=\{(a,15)$ 是第15層的格子點，$a>0\}$

由排容原理知：$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

所求$=4|A\cup B|+|\{(\pm 15,0),(0,\pm 15)\}|$

$$=4(15+15-1)+4$$
$$=4\cdot 29+4$$
$$=4(29+1)=120$$

C.如圖



A城到B城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如圖所示。今從A城出發走向B城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，則總共有_種走法。

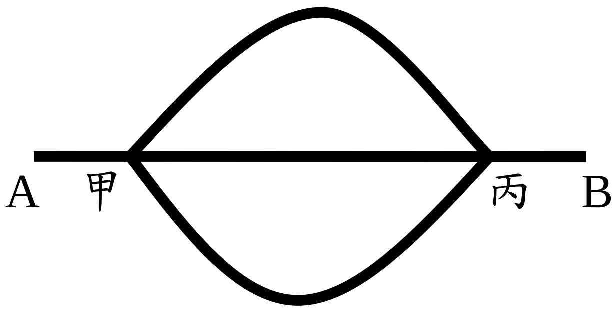
答案：6

解：可將圖簡略成右圖

從甲到丙有3種選擇

再從丙到甲有2種選擇

∴由乘法原理知其走法＝3!＝6種



第貳部分：非選擇題

一、某別墅有一個由四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線(假設路燈是一個點光源)透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為(-4,40),(16,0),(16,40)和(28,16). 求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。

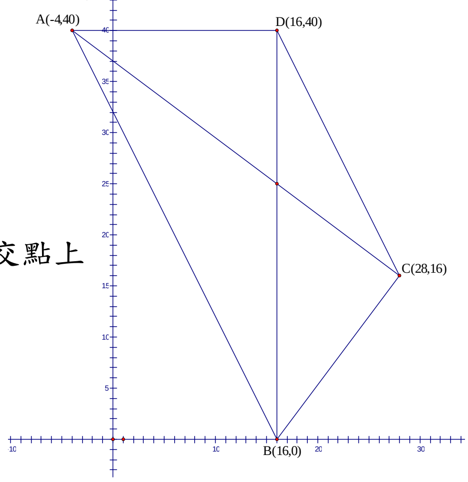
解：∵田字形窗戶的中心在兩對角線上

中心投影將直線變為直線

⇒其投影在投影後的兩對角線上

令A(-4,40),B(16,0),C(28,16),D(16,40)

∴田字窗戶的中心投影在$\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{BD}$的交點上



$\overline{AC} = (32, -24) = 8(4, -3)$

$\therefore \overleftrightarrow{AC} : 3x + 4y = 148, \overleftrightarrow{BD} : x = 16$

$\Rightarrow y = 25$

$\therefore$ 中心投影的點坐標為 $(16, 25)$

二、設 r, s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因式分解是 $x^3 + rx + s = (x + a)^2 (x + b)$, 其中 a, b 為相異實數，求證 a, b 都是有理數。

證明：$(x+a)^2(x+b) = (x^2 + 2ax + a^2)(x+b)$

$$= x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2 b$$

$$= x^3 + rx + s$$

比較係數可得

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \ldots\ldots(1) \\ a^2 + 2ab = r ..(2) \\ a^2 b = s \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

由 (1) $b = -2a$ 代入 $(2),(3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a^2 = r \ldots\ldots(4) \\ -2a^3 = s \ldots\ldots(5) \end{cases}$$

1° 若 $a = 0 \Rightarrow b = 0$, 但 $a \neq b \rightarrow\leftarrow$，故 $a \neq 0$

2° 若 $a \neq 0, \dfrac{(5)}{(4)} \Rightarrow \dfrac{2}{3}a = \dfrac{s}{r} (\because a \neq 0 \Rightarrow r \neq 0)$

$$\Rightarrow a = \frac{3s}{2r} \in \mathbb{Q}$$

且 $b = -2a \Rightarrow b \in \mathbb{Q}$ 故得證