林柏佐

大學入學考試中心
九十六學年度指定科目考試試題
數學甲

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.設 $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，試問複數 $1-z$ 的絕對值為以下哪一選項？

(1) $2\sin\frac{\pi}{7}$ (2) $\sin\frac{2\pi}{7}$ (3) $\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{7}$ (4) $\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)$ (5) $\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{7}}$

答案：(1)

解：$|1-z|^2=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{7}$

$$=2-2\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\therefore |1-z|=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)}$$

$$=2\left|\sin\frac{\pi}{7}\right|=2\sin\frac{\pi}{7}$$

2.試問下列有關極限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確？

(1)極限不存在 (2)極限為 0 (3)極限為 1 (4)極限為 5 (5)極限為 -2

答案：(4)

解：$\because$ 在 $x=1$ 附近 $3-3x-x^2<0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-3x-3)-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}x+4=5$$

3.設 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$ 是一等比數列，其首項 $a_1>1$ 且公比 $r>1$. 坐標平面上有一質點 M 自原點 (0,0) 出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點

$\left(5+5\log 2, 5+\dfrac{15}{2}\log 2\right)$的位置上，試問首項$a_1$與公比$r$組成的序對$(a_1,r)$為以下哪一選項？

(1)$(\sqrt{2},\sqrt{2})$ (2)$(2\sqrt{2},\sqrt{5})$ (3)$(2,\sqrt{2})$ (4)$(5,\sqrt{5})$ (5)$(5,\sqrt{2})$

答案：(5)

解：$\begin{cases}\log a_1+\log a_3+\log a_5+\log a_7+\log a_9=5+5\log2\\ \log a_2+\log a_4+\log a_6+\log a_8+\log a_{10}=5+\dfrac{15}{2}\log2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\log a_1+\log a_1r^2+\log a_1r^4+\log a_1r^6+\log a_1r^8=5+5\log2\\ \log a_1r+\log a_1r^3+\log a_1r^5+\log a_1r^7+\log a_1r^9=5+\dfrac{15}{2}\log2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}5\log a_1+20\log r=5+5\log2\\ 5\log a_1+25\log r=5+\dfrac{15}{2}\log2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log a_1+4\log r=1+\log2......(1)\\ \log a_1+5\log r=1+\dfrac{3}{2}\log2...(2)\end{cases}$

$(2)-(1)$ $\log r=\dfrac{1}{2}\log2\Rightarrow\log r=\log\sqrt{2}$ $\therefore r=\sqrt{2}$

代回(1) $\log a_1+2\log 2=1+\log2$

$\Rightarrow\log a_1=1-\log 2=\log 5$

$\therefore a_1=5$ $\therefore(a_1,r)=(5,\sqrt{2})$

二、多選題

4.某校高三共有300位學生，數學科第一次段考、第二次段考成績分別以X、Y表示，且每位學生的成績用0至100評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為0.016, 試問下列哪些選項是正確的？

(1) X與Y的相關情形可以用散佈圖表示 (2)這兩次段考的數學成績適合用直線$X=a+bY$表示X與Y的相關情形(a,b為常數，$b\neq0$) (3) $X+5$與$Y+5$的相關係數仍為0.016 (4)$10X$與$10Y$的相關係數仍為0.016 (5)若$X'=\dfrac{X-\overline{X}}{S_x}$、$Y'=\dfrac{Y-\overline{Y}}{S_y}$, 其中$\overline{X}$、$\overline{Y}$分別為$X$、$Y$的平均數，$S_x$、$S_y$分別為$X$、$Y$的標準差，則$X'$與$Y'$的相關係數仍為0.016

答案：(1)(3)(4)(5)

解：(1)O:我們利用散佈圖來觀察兩組數據的相關係數

(2)×:$\because |r|<0.3\Rightarrow$低度相關，故不適合用回歸直線表示$X$與$Y$的相關情形

(3)O:$r_{(x+5,y+5)}=r_{(x,y)}=0.016$

(4)O:$r_{(10x,10y)}=r_{(x,y)}=0.016$

(5)O:$r_{(x',y')}=r_{\left(\frac{X-\overline{X}}{S_x},\frac{Y-\overline{Y}}{S_y}\right)}=\dfrac{|S_xS_y|}{S_xS_y}r_{(x,y)}$, 且$S_x>0,S_y>0$

$\therefore r_{(x',y')}=r_{(x,y)}=0.016$　故選(1)(3)(4)(5)

5.設$P(x)$是一個五次實係數多項式。若$P(x)$除以$x-3$的餘式是2，且商$Q(x)$是一個係數均為正數的多項式，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $P(x)=0$與$Q(x)=0$有共同的實根　(2) 3是$P(x)=2$唯一的實根

(3) $P(x)$不能被$x-4$整除　(4) $P(x)=0$一定有小於3的實根

(5) $P(x)$除以$(x-3)(x+3)$的餘式也是2

答案：(3)(4)

解：由除法原理：$P(x)=(x-3)Q(x)+2$

且由輾轉相除法原理$P(x)$與$Q(x)$的最高公因式

亦為$Q(x)$與2的最高公因式，但$Q(x)$與2互質

$\therefore P(x)$與$Q(x)$無一次以上因次$\Rightarrow P(x)=0$與$Q(x)=0$無共同實根

$P(x)-2$是五次實係數多項次$\Rightarrow$有奇數個實根$\Rightarrow$不一定有唯一解

$P(4)=(4-3)Q(4)+2$

$=Q(4)+2>0\neq 0$

$\therefore$由因式定理知$x-4\nmid P(x)$

若$x\geq 3\Rightarrow P(x)=(x-3)Q(x)+2>0\neq 0$　$\therefore$無實根

但$\deg P(x)=5$是奇數$\Rightarrow$至少有一實根

$\therefore P(x)=0$一定有小於3的實根

由除法原理：$r(x)=ax+b$不一定等於2　故選(3)(4)

6.設a是不為零的實數，且以下的三元一次方程組有解：

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ \dfrac{y-5}{3}=z-4\\ \dfrac{x}{a}=z-2\\ \dfrac{y+1}{3}=z-2\end{cases}$$

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a=2$　(2)原方程組有唯一解　(3)方程組$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ \dfrac{x}{a}=z-2\end{cases}$有無窮多解

(4)方程組$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=z-2\\ \dfrac{y+1}{3}=z-2\end{cases}$有唯一解　(5)方程組$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ \dfrac{y-5}{3}=z-4\end{cases}$有無窮多解

答案：(2)(3)(5)

解：(1)×:由$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ \dfrac{y-5}{3}=z-4\\ \dfrac{y+1}{3}=z-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+1=0\\ y-3z+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-1+3t,t\in\mathbb{R}\\ z=2+t\end{cases}$

代入$\dfrac{x}{a}=z-2\Rightarrow -1+2t=a(\cancel{2}+t-\cancel{2})\Rightarrow(2-a)t=1......(1)$

若$a=2$，代入(1)式得$0=1\rightarrow\leftarrow$

$\therefore a\neq 2$

(2)O:由(1)$\Rightarrow\begin{cases}3x-2y+1=0\\ y-3z+7=0\\ x-az+2a=0\end{cases}\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}3&-2&0\\0&1&-3\\1&0&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&3a\\0&1&-3\\1&0&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&3a\\1&-3\end{vmatrix}$

$=6-3a\neq 0$ ∴原方程組有唯一解

(3)O:∵此兩平面法向量不平行⇒交於一線 ∴有∞解

(4)×:兩平面相交情形不可能有唯一解

(5)O:∵此兩平面法向量不平行⇒交於一線 ∴有∞解 故選(2)(3)(5)

7.有關矩陣$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$與矩陣$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $AB=BA$ (2) $A^2B=BA^2$ (3) $A^{11}B^3=B^6A^5$ (4) $AB^{12}=A^7$ (5) $(ABA)^{15}=AB^{15}A$

答案：(2)(4)(5)

解：(1)×: $AB=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow AB\neq BA$

(2)O: $A^2=I,A^2B=IB=B=BI=BA^2$

(3)×: $B=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&-\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$，由棣美弗定理知：

$B^3=\begin{bmatrix}\cos 180^\circ&-\sin 180^\circ\\ \sin 180^\circ&\cos 180^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},B^6=\begin{bmatrix}\cos 360^\circ&-\sin 360^\circ\\ \sin 360^\circ&\cos 360^\circ\end{bmatrix}=I$

$A^{11}=(A^2)^5A=I^5A=A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{11}B^3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$A^5=(A^2)^2A=I^2A=A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow B^6A^5=IA=A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{11}B^3\neq B^6A^5$

(4)O:由(3)：$B^6=I\Rightarrow AB^{12}=AI^2=A, A^7=(A^2)^3A=I^3A=A$

$\therefore AB^{12}=A^7$

(5)O:由(2)：$A^2=I\Rightarrow A=A^{-1}$

$(ABA)^{15}=(ABA^{-1})^{15}=AB^{15}A^{-1}=AB^{15}A$ 故選(2)(4)(5)

8.考慮坐標平面上函數 $y=x^3+2x+3$ 的圖形(x 為任意實數)，試問下列哪些選項是正確的？

(1)圖形有最高點，也有最低點 (2)圖形有水平切線

(3)圖形與任一水平直線恰有一交點 (4)若 (a,b) 在圖形上，則 $(-a,-b+6)$ 也在圖形上

(5)圖形與三直線 $x=0, x=1, y=0$ 所圍成的區域之面積大於4

答案：(3)(4)(5)

解：(1)×:$\because \lim\limits_{x\to\infty} x^3+2x+3=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+2x+3=-\infty\Rightarrow$ 無最高點與最低點

(2)×: $y'=3x^2+2\geq 2>0$ $\therefore$ 無水平切線

(3)O:由(2)知 $y'>0$ $\therefore$ y嚴格遞增 $\Rightarrow y$ 為一對一函數，且任取 $c\in\mathbb{R}$

$x^3+2x+3=c$ 為一個三次多項方程式 $\therefore x$ 一定有實數解

$\therefore$ 圖形與任一水平線恰有一交點

(4)O:已知 $b=a^3+2a+3\Rightarrow -a^3-2a+3=(3-b)+3=-b+6$

$\therefore (-a,-b+6)$ 也在圖形上

(5)O:下和 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\dfrac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k-1)^3}{n^3}+\frac{2(k-1)}{n}+3\right]\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2n^2}{4n^4}+\frac{(n-1)n}{n^2}+3=\frac{1}{4}+1+3=\frac{17}{4}>4$$

$\therefore$ 所求區域面積 $\geq L>4$ 故選(3)(4)(5)

三、選填題

A.某公司共有6個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率為 $\dfrac{k}{50}$，其中 $k=1,2,3,4,5,6,$ 為了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若為不良品，則此不良品是來自第五個工廠的機率為____________.(化成最簡分數)

答案：$\dfrac{5}{21}$

解：所求 $=P$(第五個工廠 | 不良品)$=\dfrac{\frac{5}{50}}{\frac{1+2+3+4+5+6}{50}}=\dfrac{5}{\frac{6\cdot 7}{2}}=\dfrac{5}{21}$

B.在坐標平面上，一圓通過點 $(-2,7),$ 且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1,6),$ 若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0,$ 則 $a=$________, $b=$________, $c=$____.

林柏佐

答案：$a=10, b=-6, c=9$

解：令 $A(-2,7), B(-1,6)$

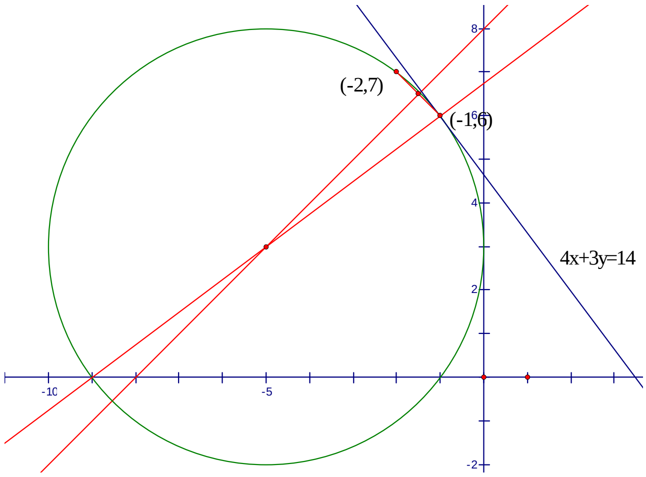
通過點B與 $4x+3y=14$ 垂直的直線：$3x-4y+27=0$

$\overline{AB}$ 的中點 $(\frac{-3}{2},\frac{13}{2}), \overline{AB}=(1,-1)$ $\therefore \overline{AB}$ 的中垂線：$x-y+8=0$

$\therefore \begin{cases} 3x-4y+27=0 \\ x-y+8=0 \end{cases} \Rightarrow$ 圓心 $(-5,3)$, 半徑 $=\sqrt{(-2+5)^2+(7-3)^2}=5$

$\therefore$ 圓的方程式：$(x+5)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2+10x-6y+9=0$

$\therefore a=10, b=-6, c=9$



C.張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為432平方公分的限制之下，為了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計為______公分。

答案：12

解：設底面邊長為 x 公分

高為 y 公分

$x^2+4xy=432$ 由算幾定理：

$\Rightarrow \dfrac{x^2+2xy+2xy}{3} \geq \sqrt[3]{4x^4y^2}$

$\Rightarrow 4x^4y^2 \leq 144^3=(12^2)^3=(12^3)^2$

$\Rightarrow x^2y \leq \dfrac{12^3}{2}$ $\therefore$ 體積最大值時 $x^2=2xy=\dfrac{432}{3}=144 \Rightarrow x=12$

第貳部分：非選擇題

一、設 $f(x)=x^3-6x^2-x+30$, 且 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根。

(1)求解三次方程式 $f(x)=0$.

(2)若 ΔABC 中，$\overline{AC}=a, \overline{BC}=b, \angle ACB=120^{\circ}$, 且 D,E 是 $\overline{AB}$ 上兩點，滿足 $\overline{BD}=\overline{BC}, \overline{AE}=\overline{AC}$, 試求 ΔCDE 的面積。

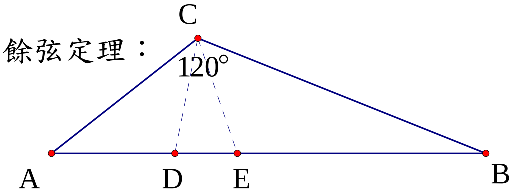
解：(1)由牛頓定理知其可能有理根：$\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm10,\pm15\pm30$

林柏佐

$$\begin{array}{r|l} 1-6-\ 1+30 & 3 \\ +3-\ 9-30 & \\ \hline 1-3-10 & \underline{+0} \end{array} \quad \therefore f(x)=(x-3)(x^2-3x-10) \\ =(x-3)(x-5)(x+2)$$

$\therefore f(x)=0$ 的解為 $3,5,-2$

(2)在不失一般性的情況下，可令 $a=3,b=5$ 由餘弦定理：



$\overline{AB}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120^\circ \Rightarrow \overline{AB}=7$

$\overline{DE}=\overline{AE}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=3+5-7=1$

$\therefore \Delta CDE=\frac{1}{7}\Delta ABC=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ\right)=\frac{15}{28}\sqrt{3}$

二、設 ΔABC 的三頂點坐標分別為 $A(-2,7,15),B(1,16,3),C(10,7,3)$.

(1)試求通過 A,B,C 三點的平面方程式。

(2)試求 ΔABC 的外心坐標。

解：(1) $\overline{AB}=(3,9,-12)=3(1,3,-4)$

$\overline{AC}=(12,0,-12)=12(1,0,-1)$

$(1,3,-4)\times(1,0,-1)=(-3,-3,-3)=-3(1,1,1)$

$\therefore$ 平面方程式：$x+y+z=20$

(2) $\overline{AB}$ 的中點 $(-\frac{1}{2},\frac{23}{2},9)\Rightarrow \overline{AB}$ 的中垂面：$x+3y-4z+2=0$

$\overline{AC}$ 的中點 $(4,7,9)\Rightarrow \overline{AC}$ 的中垂面：$x-z+5=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+3y-4z+2=0 \\ x-z+5=0 \end{cases} \quad \therefore \text{外心坐標}\ (3,9,8)$$