信賴區間與信心水準的解讀

根據 TVBS 民意調查中心 2008 總統大選前 1 天民調，馬英九獲得 58%的支持度，這次調查是在 95%的信心水準下，從 1110 位台灣 20 歲以上之民眾依電話後四碼電腦隨機抽樣，抽樣誤差為 2.9 個百分點。

根據這樣的片段，民調中心到底是依據哪些理論基礎，從少數一千多位選民，去推估 1300 多萬選民的投票意向，這就是我們這裡要討論的。

常態分配

在機率與統計中，常態分配是最重要的連續型隨機變數，經過一些研究指出，我們日常生活中，許多資料的分配都接近是常態分配，如男人的身高、體重等，所以我們如果能對常態分配有些程度的了解，就可以對一些想探討的資料做某種程度上的估計與猜測(例如上例中猜誰會當選總統)。

現在我們就來介紹常態分配的一些特性，請先觀察下圖：

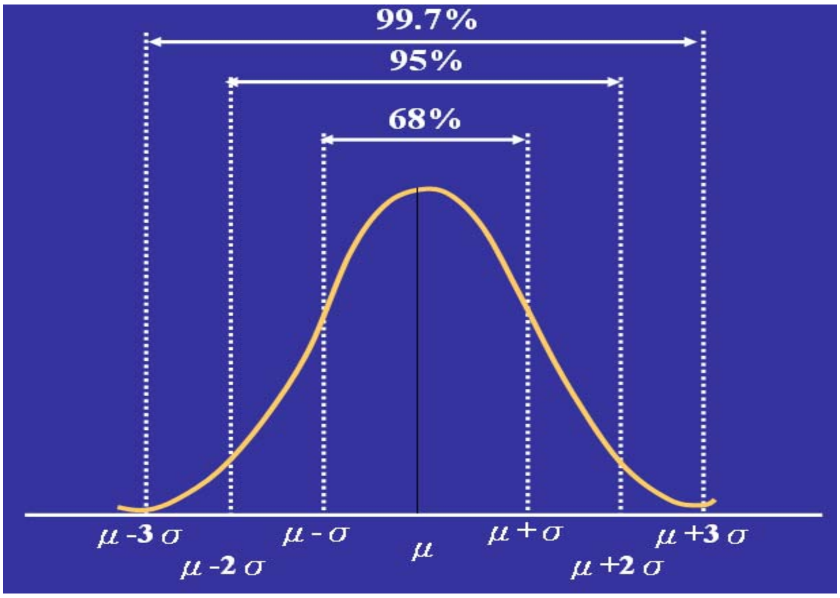


圖. 常態分配

從上圖我們可以發現若母體是常態分配的資料，數值會較集中在中央，而離中央越遠(離均差越大)數值會越少，而圖形是左右對稱的鐘型，對稱中心是母體平均數μ，離散的程度可以用母體標準差。

底下我們來看他在各個範圍內所佔的比例(請務必熟記)，

①約有 68%的資料落在平均數距離一個標準差$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$範圍內。

②約有 95%的資料落在平均數距離兩個標準差$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$範圍內。

(若四捨五入到小數點後第二位，則約落在距離平均數 1.96 個標準差$(\mu-1.96\sigma,\mu+1.96\sigma)$範圍內)

③約有 99.7%的資料落在平均數距離三個標準差$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$範圍內。

Note. 事實上我們在日常生活中碰到的情境，往往都只是樣本的部份，我們會說它接近常態分配(當然不是真的，∵我們碰到的都是離散型資料，當然不可能是連續的)，那我們要用什麼當作$\mu,\sigma,$ 的估計呢？沒錯，和你想的一樣，我們就是利用樣本平均數($\overline{x}$)與樣本標準差s去取代它們，但是請同學務必小心使用這兩個符號，不要混著用，因為樣本的話是估計的情形(不是原本母體的情形)，而母體是我們無法掌握的，但是往往我們藉由樣本去估計母體，這就是我們這節所要教的精神！如果符號使用上不會弄錯，代表你觀念已經很清楚了！那麼很恭喜你，因為很多人都會弄混這兩個概念。

Example1.

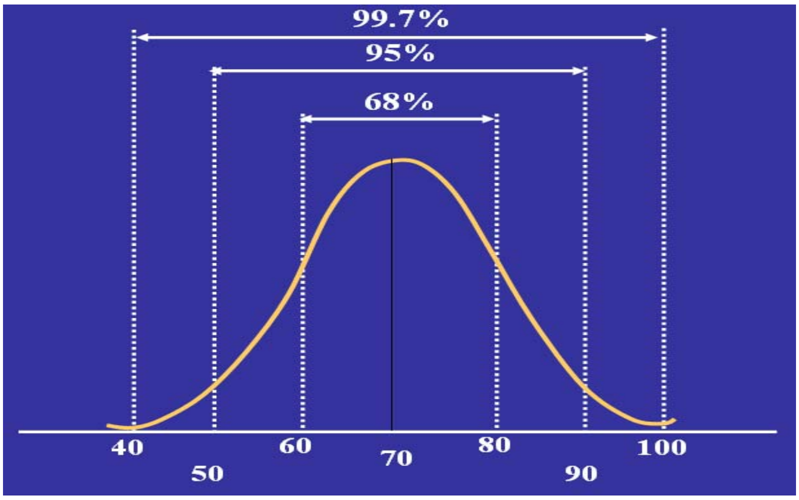
某校有學生 1000 位，數學段考成績呈常態分布，平均成績 70 分，標準差 10 分，則

①此次段考成績不及格的學生約有幾位？

②成績超過 90 分的有幾位？

③某生成績 80 分，他在全校大約排第幾名？

Solution.



①$1000\cdot\dfrac{32\%}{2}=160$ (人)

②$1000\cdot\dfrac{5\%}{2}=25$ (人)

③80 分以上共有：$1000\cdot\dfrac{32\%}{2}=160\Rightarrow$ 大約 160 名

當初常態分配是由法國數學家 Abraham DeMoivre 在 1733 年發表的，是為了解決二項分配(我們在高三時會介紹，不過我們在之前的機率問題中也有碰到一

些二項型機率的問題)當 n 很大時的一個良好估計。這個結果，後來由 Laplace 等其他人加以推廣，演變到後來變成機率理論很著名的中央極限定理(這個非常重要，但證明已超過高中範圍，有興趣的同學，可以在大學修機率或統計的課程，一定會提到這個理論)。

信賴區間與信心水準

接著我們回頭來解釋我們一開始提到的民調片段：「根據 TVBS 民意調查中心 2008 總統大選前 1 天民調，馬英九獲得 58%的支持度，這次調查是在 95%的信心水準下，從 1110 位台灣 20 歲以上之民眾依電話後四碼電腦隨機抽樣，抽樣誤差為 2.9 個百分點。」這句話的意義，以及大略知道為何能以 1110 人來猜測全體民眾的投票意向。

讓我們一起來想想民調中心是如何去調查兩位總統候選人的支持度，如果要求最準確的話，方法當然是調查“所有”有投票權的選民，假設其中若有 N 個人願意去投票，且有 M 個人支持馬蕭配，則馬蕭配真正的支持度為

$p=\dfrac{M}{N}$ (此為母群體調查所獲得的“真正”比例，我們稱為*參數*，主要是如果我們對“參數”有某種程度的了解，我們就可以了解母體分布的情形，通常比例這個參數我們是用 p 表示，∵比例的英文是 porpotion 的緣故)

然而，大家可想而知，這樣的調查方法太耗費人力、物力與時間(這也是為什麼我們之前強調抽樣的重要性)，因此民調中心都是採用抽樣的方式來調查。

為了估計真正的支持度 p, 假設民調中心抽取了 1000 人的樣本，若有 580 位選民支持馬蕭配(實際上還有未表態的情形，不過為了簡化起見，我們假設受訪的人都表態)，則再這樣的樣本中馬蕭配的支持度為

$\dfrac{580}{1000}=58\%$ (此為樣本調查所獲得的比例，稱之為統計量，一般用 $\hat{p}$ (讀作 p-hat)表示。).

當然這也是對馬蕭配支持度的一個估計，如果現在民調中心重新抽取了另一個 1000 人的樣本，可想而知，甲候選人的支持度可能會改變，意即馬蕭配支持度這個統計量 $\hat{p}$ 會隨著你取的樣本而改變，我們也很難斷定 p 就會是 $\hat{p}$。因此我們發現如果我們只用一個數值推斷，可能會有些誤差，因此我們將原本考慮一個點估計，變成一個區間估計，這樣的話，我們就將一些變異的概念納入，因此我們改成推估 p 值在 $\hat{p}$ 值附近範圍內的機率，由與此理論需用到中央極限定理，以及二項分配的概念，在此我們不做證明，同學上了高三之後應能有更進一步的了解，我們將此結果敘述如下：

當我們從母體中抽取n個人組成一個樣本(n需足夠大，例如上面的 1000 人)，即可得一個統計量$\widehat{p}$的值(例如上面的得票率)，若我們重複抽取n個人(例如都是 1000 人)，可得很多統計量$\widehat{p}$的值，而這些統計量$\widehat{p}$的值會近似於常態分配，其標準差為$\sigma=\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

如果$\widehat{p}\in(p-\sigma,p+\sigma)\Rightarrow p\in(\widehat{p}-\sigma,\widehat{p}+\sigma)$. 而由常態分配的概念可知，真正的$p$值有 68%的機率會落在$(\widehat{p}-\sigma,\widehat{p}+\sigma)$內。因此，我們有以下的結論：

①真正的p值有 68%的機率會落在$(\widehat{p}-\sigma,\widehat{p}+\sigma)$內

②真正的p值有 95%的機率會落在$(\widehat{p}-2\sigma,\widehat{p}+2\sigma)$內

③真正的p值有 99.7%的機率會落在$(\widehat{p}-3\sigma,\widehat{p}+3\sigma)$內

一般來說，我們並不知道真正的p值，但當抽取樣本n很大時，統計量$\widehat{p}$會很接近p的值(即大數法則，$\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{p}=p$, 一樣這也超出高中範圍，我們不去證明，但是一般我們所用的機率都有這樣的性質，我們會認為當投擲越多次，應該其比例會越接近其真正的機率值)。因此我們利用$\widehat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$(也是一個參數)來估計母體標準差$\sigma=\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$(再次提醒所用的符號，估計需加 hat, 其為參數，也是我們實際上可以算的，而沒有加 hat, 是母體的部份，我們常常無法得知，除非選舉結果出爐，不然很難用民調抽樣調查出來)

我們稱$(\widehat{p}-\widehat{\sigma},\widehat{p}+\widehat{\sigma})$為$p$值 68%的*信賴區間*。

$(\widehat{p}-2\widehat{\sigma},\widehat{p}+2\widehat{\sigma})$為$p$值 95%的信賴區間。

$(\widehat{p}-3\widehat{\sigma},\widehat{p}+3\widehat{\sigma})$為$p$值 99.7%的信賴區間。

而 68%, 95%, 99.7%為p值會落在上述相對區間的*信心水準*。

Example2.

有一民調中心想調查市長甲候選人的支持度，隨機抽取的一個 1000 人的樣本，其中有 570 位市民支持甲候選人，試求 95%的信賴區間。

Solution.

由題意知：甲候選人支持度的統計量 $\hat{p}=\dfrac{570}{1000}=0.57$

標準差的統計量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{0.57(1-0.57)}{1000}}\approx 0.0157$

$2\hat{\sigma}\approx 2\cdot 0.0157\approx 0.031$

$\Rightarrow \hat{p}-2\hat{\sigma}\approx 0.57-0.031=0.539, \hat{p}+2\hat{\sigma}\approx 0.57-0.031=0.601$

$\therefore$ 這樣調查 95%的信賴區間為 $(0.539, 0.601)$, 而 $2\hat{\sigma}\approx 0.031$ 表示抽樣誤差為 3.1%.

Remark.

這裡要特別強調信賴區間的解讀，很多人都會計算信賴區間，例如上面的例題，有些人會把他解釋為“甲候選人的支持度約有 95%的機率落在 $(0.539, 0.601)$ 中”，但是這是一個很嚴重的錯誤觀念。我們在上面一直強調我們拿不同的樣本調查算出來的結果可能會不一樣，不能只拿一個樣本來說明，因為只拿一個樣本他算出來的信賴區間已經固定，而母體的 p 也是固定的常數(雖然我們不知道是多少)，既然都是固定的何來機率之有呢？那要如何解釋呢？

正確的說法是對同一事件做調查 100 次(假設)，每次會得到一組數據，將這 100 個信賴區間求出來，在這麼多的信賴區間中，p 約有 95%的機率落在這些信賴區間中，也就是說大約有 95 個信賴區間會包含參數 p.

因此 Example2 的結果，我們可以有以下的兩種說法：

①我們有 95%的信心，甲候選人的支持率落在 $53.9\% \sim 60.1\%$.

②在 95%的信心水準下，誤差不超過 3.1%, 甲候選人的支持率為 57%.

事實上我們這節一開始介紹的例子，2008 總統大選，最後的選舉結果，馬蕭配的得票率為 58%, 所以我們覺得 TVBS 民調中心還滿準的，因此善加利用你學會的知識，也可以幫助你判斷一些統計資料！